Behandlung des Vorganges, daß eine ebene elektromagnetische Welle, die auf die ebene Oberfläche eines Körpers, insbesondere eines Leiters, auftrifft, von diesem reflektiert wird,

auf Grund der Maxwellschen Gleichungen unter ausführlichem Eingehen auf die Art der stattfindenden Energiefortpflanzung.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen Philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Hans Wolff

aus Dresden.

Borna - Leipzig

Buchdruckerei Robert Noske

1910.

Referent: Professor Dr. R. H. Weber

Meiner lieben Mutter!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551526_0012

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

Erster Teil.

Herleitung von Formeln für die in den Wellengleichungen auftretenden Konstanten.

§ 1. Voraussetzungen und Grundgleichungen 3
§ 2. Einfallende und eindringende Welle 4
§ 3. Reflektierte Welle 10
§ 4. Zusammenstellung der gefundenen Formeln 14
§ 5. Spezialisierung der Formeln 16
§ 6. Herleitung für den Fall, daß $\varkappa T$ groß gegenüber ε ist 18
§ 7. Zusammensetzung der einfallenden und der reflektierten Welle . 21
§ 8. Bemerkungen zur Beurteilung des Gültigkeitsbereiches der aufgestellten Formeln 22

Zweiter Teil.

Graphische Darstellungen der Wellen und tabellarischer Überblick.

§ 1. Darstellung der Wellen durch ein Vektordiagramm 24
§ 2. Tabellarischer Überblick 25
§ 3. Graphische Darstellung der Wellen für einen Spezialfall . . . 27

Dritter Teil.

Die Fortpflanzung der Energie durch elektromagnetische Wellen.

§ 1. Energiefortpflanzung durch eine in einem Isolator fortschreitende Welle 31
§ 2. Energieströmung infolge einer in einem Leiter fortschreitenden Welle 32
§ 3. Energiedichte im Leiter und deren Vergleich mit dem Energiestrom 36
§ 4. Berechnung der Geschwindigkeit v_e, mit der die Energie im Leiter strömt 38
§ 5. Die zeitlichen Mittelwerte von $\mathfrak{E}$, der Stärke der Energieströmung, und von H, der Energiedichte im Leiter 43
§ 6. Energiefortpflanzung im Vakuum während der Reflexion . . . 44
§ 7. Berechnung der Geschwindigkeit v_e', mit der die Energie im Vakuum während der Reflexion strömt 46
§ 8. Energetische Bedeutung des Transmissionskoeffizienten 1—P . . 48
§ 9. Zusammenhang zwischen dem Transmissionskoeffizienten und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlung im Leiter . . 49

Einleitung.

Die Reflexion von langwelliger Strahlung an Metalloberflächen hat durch die experimentellen Untersuchungen von E. Hagen und H. Rubens[1]) ein besonderes Interesse erlangt. Es ist daher erwünscht, daß man sich vom genannten Vorgange ein möglichst anschauliches Bild machen kann. In vorliegender Arbeit ist versucht worden, dies nach Möglichkeit zu erreichen. Entsprechend den erwähnten Messungen ist senkrechter Einfall der Strahlung gewählt, und zwar ist angenommen, daß eine ebene, linear polarisierte elektromagnetische Welle von konstanter Amplitude senkrecht auf die ebene Oberfläche eines unendlich dicken, homogenen, isotropen Körpers auftrifft. Es sind also möglichst einfache Verhältnisse gewählt worden. Dies ist erforderlich, wenn man daran gehen will, die ziemlich verwickelten Vorgänge der Anschauung etwas näher zu bringen. Die Voraussetzung für die anzustellenden Betrachtungen ist, daß die in Frage kommenden Wellengleichungen in brauchbarer Form zur Verfügung stehen. Daher finden sich im folgenden zwei Herleitungen der erforderlichen Formeln. Als Unterschied der ersteren von ihnen gegenüber den mir bekannten anderen Verfahren[2]) sei erwähnt, daß in ihr nicht die Voraussetzung gemacht ist, die Dämpfungsfunktion lasse sich als Exponentialfunktion schreiben, sondern dies durch Anwendung der Maxwellschen Gleichungen bewiesen wird. Es sei hervorgehoben, daß sie nicht nur für gute Leiter gilt, sondern auch für Halb-

---

[1]) E. Hagen und H. Rubens, Annalen der Physik 1903 Nr. 8b S. 873 und Verh. der Deutsch. Phys. Gesellschaft 1908 S. 710.

[2]) s. z. B. P. Drude, Lehrbuch der Optik 1906 S. 342 ff. und Planck, Berl. Ber. 1903 S. 278.

leiter und Isolatoren. Auch wird angedeutet, wie der durch die Dispersion sich kundtuende Einfluß der Elektronenschwingungen Berücksichtigung finden kann. Die zweite Ableitung bezieht sich vornehmlich auf den Sonderfall, daß eine langwellige Strahlung auf einen Leiter auftrifft, und besitzt die Eigentümlichkeit, daß in der einen Feldgleichung der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt wird, wodurch sich die Rechnung vereinfacht.

Die erhaltenen Formeln werden für graphische Darstellungen und einen tabellarischen Überblick verwandt sowie für eine eingehende Untersuchung der stattfindenden Energiefortpflanzung, besonders der in einem Leiter sich vollziehenden.

Erster Teil.

Herleitung von Formeln für die in den Wellengleichungen auftretenden Konstanten.

§ 1.

Voraussetzungen und Grundgleichungen.

In Beziehung auf ein rechtshändiges, rechtwinkliges Koordinatensystem sollen die Komponenten der elektrischen Feldstärke mit X, Y und Z, die der magnetischen mit A, B und C bezeichnet werden. Die Permeabilität des betrachteten Mediums sei μ, seine Dielektrizitätskonstante ε und seine elektrische Leitfähigkeit sei $\varkappa$, und es gelte die Voraussetzung, daß die drei Größen sich nicht zeitlich ändern. Macht man nun, wie im folgenden immer geschehen soll, vom elektrostatischen Maßsystem Gebrauch, so lauten die Maxwellschen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \mu\frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ \mu\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\varkappa X + \varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \\ 4\pi\varkappa Y + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \\ 4\pi\varkappa Z + \varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Grenzfläche zwischen dem betrachteten Körper und dem Vakuum bezw. der Luft sei die xy-Ebene des beistehend ge-

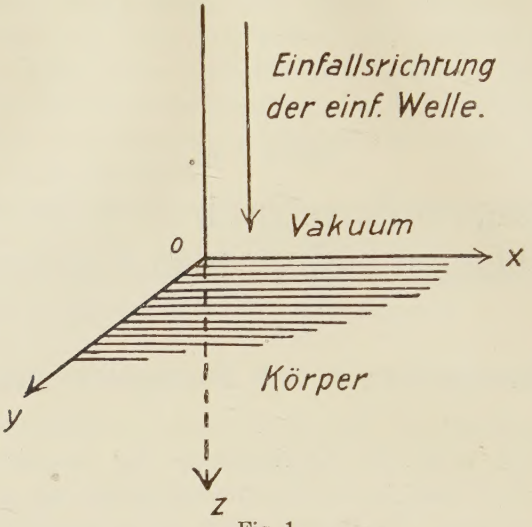

Fig. 1.

zeichneten Koordinatensystems. Gemäß der Benutzung des elektrostatischen Maßsystems ist für das Vakuum zu setzen:

$$\varepsilon_v = 1, \quad \mu_v = \frac{1}{v^2} \quad (v = 3 \cdot 10^{10}).$$

§ 2.

Einfallende und eindringende Welle.

Der elektrische Vektor der einfallenden Welle soll geschrieben werden:

$$X_e = E \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v}\right), \quad Y_e = 0, \quad Z_e = 0.$$

Der Ausdruck für den magnetischen Vektor ist nun durch Anwendung von (1) zu berechnen. Da der Zustand periodisch ist und sich ihm kein konstantes Feld überlagern soll, findet man:

$$A_e = 0, \quad B_e = -v^2 \int E \frac{2\pi}{vT} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v}\right) dt$$

$$= E v \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v}\right), \quad C_e = 0.$$

Einfallende Welle:

$$\begin{cases} X_e = E\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v}\right) & (3) \\ B_e = vE\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v}\right) & (4) \end{cases}$$

Wir machen die Annahme, daß im Körper eine fortschreitende Welle auftritt. Da er als homogen und isotrop vorausgesetzt ist und die ebene einfallende Welle senkrecht auf ihn auftrifft, schließen wir, daß auch die eindringende Welle eben ist und in der z-Richtung fortschreitet. Dann hängen die sie bestimmenden Vektoren nur von z ab, so daß sie nach (1) und (2) den Gleichungen Genüge leisten:

$$\mu\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} \quad (5a) \qquad 4\pi\varkappa X + \varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial z} \quad (6a)$$

$$\mu\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial z} \quad (5b) \qquad 4\pi\varkappa Y + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial A}{dz} \quad (6b)$$

$$\mu\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad (5c) \qquad 4\pi\varkappa Z + \varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} = 0. \quad (6c)$$

Da offenbar ein periodischer Schwingungsvorgang vorhanden ist, folgt aus (5c)

$$C = 0.$$

Die Lösung der Gleichung (6c) lautet:

$$Z = c\,e^{-\frac{4\pi\varkappa}{\varepsilon}t},$$ c ist von t unabhängig.

Es ist also zu setzen

$$Z = 0.$$

Die Beziehungen (5a) bis (6c) zeigen ferner, daß die Vektoren A und Y nur voneinander abhängen, also insbesondere von X und B vollständig unabhängig sind. Da nun im Vakuum die Größen A und Y gleich Null sind, so ist ersichtlich, daß auch im Körper dies der Fall ist, da ja die elektromagnetische Erregung in diesem lediglich durch die einfallende Welle hervorgerufen sein soll. In ihm sind somit nur die Vektoren X und B von Null verschieden anzunehmen; die elektrischen und magnetischen Schwingungen müssen also in denselben Ebenen erfolgen wie bei der einfallenden Welle.

Da der betrachtete Körper auch ein Leiter sein kann, ist beim Ansetzen der Gleichungen für die eingedrungene Welle zu beachten, daß infolge der in einem solchen auftretenden elektrischen Strömung elektromagnetische Energie in Joulesche Wärme umgewandelt wird, so daß die Schwingungen beim Fortschreiten gedämpft werden. Die Dämpfungsfunktion nennen wir f(z) und nehmen an, daß die Gleichungen der eingedrungenen Welle in der Form geschrieben werden können:

$$X_d = D\,f(z)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \tau_1 - \frac{z}{v_0}\right) \quad (7)$$

$$B_d = \mathfrak{D}\,f(z)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \tau_0 - \frac{z}{v_0}\right), \quad (8)$$

wobei v_0 die Geschwindigkeit bedeutet, mit der die Welle im Körper fortschreitet. Man erhält das Argument von X_d, indem man zu demjenigen von B_d den Betrag $\frac{2\pi}{T}(\tau_0 - \tau_1)$ hinzufügt. Diesen Unterschied der beiden Argumente, der eine Phasenverschiebung von X_d und B_d kennzeichnet, wollen wir δ nennen, so daß die Gleichung gilt:

$$\delta = \frac{2\pi}{T}(\tau_0 - \tau_1). \quad (9\,a)$$

Untersucht man die eingedrungene Welle außer Zusammenhang mit der einfallenden und der reflektierten, so ist die Wahl des Zeitpunktes $t = 0$ beliebig, so daß man in (7) und (8) zu t denselben Wert hinzufügen kann, ohne die Gültigkeit der Beziehungen aufzuheben. Wir wollen in beiden Gleichungen t um τ_0 vermehren. Das Argument, welches jetzt zu B_d gehört, heiße ϱ, so daß zu setzen ist:

$$\varrho = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v_0}\right). \quad (9)$$

Nunmehr treten an Stelle der Gleichungen (7) und (8) die beiden folgenden[1]):

[1]) Es sind hier nicht, wie sonst, lateinische, sondern deutsche Buchstaben für die Vektoren benutzt, da in den Argumenten die soeben angegebene Änderung vorgenommen worden ist.

$$\mathfrak{X}_d = D\,f(z)\cos(\varrho + \delta)$$
$$\mathfrak{B}_d = \mathfrak{D}\,f(z)\cos\varrho.$$

Die Benutzung von (5 b) und (6 a) ergibt die beiden Beziehungen:

$$\mu\,\mathfrak{D}\,f(z)\frac{2\pi}{T}\sin\varrho = D\left[f'(z)\cos(\varrho+\delta) + f(z)\frac{2\pi}{v_0 T}\sin(\varrho+\delta)\right] \quad (10)$$

sowie

$$4\pi\varkappa D\,f(z)\cos(\varrho+\delta) - \varepsilon D\,f(z)\frac{2\pi}{T}\sin(\varrho+\delta) = -\mathfrak{D}\left[f'(z)\cos\varrho + f(z)\frac{2\pi}{v_0 T}\sin\varrho\right]. \quad (11)$$

Das Amplitudenverhältnis $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ soll χ genannt werden, es ist also:

$$\chi = \frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{\text{Amplitude des magnetischen Vektors der eingedrungenen Welle}}{\text{Amplitude des elektrischen Vektors der eingedrungenen Welle}}.$$

Aus (10) folgt:

$$\mu\chi\,f(z)\sin\varrho = f'(z)\frac{T}{2\pi}(\cos\varrho\cos\delta - \sin\varrho\sin\delta) + f(z)\frac{1}{v_0}(\sin\varrho\cos\delta + \cos\varrho\sin\delta)$$

und aus (11):

$$2\varkappa T f(z)(\cos\varrho\cos\delta - \sin\varrho\sin\delta) - \varepsilon f(z)(\sin\varrho\cos\delta + \cos\varrho\sin\delta) = -\chi\left[f'(z)\frac{T}{2\pi}\cos\varrho + f(z)\frac{1}{v_0}\sin\varrho\right].$$

Da diese Gleichungen für jeden Wert von ϱ bestehen, ist sowohl der Faktor von $\sin\varrho$ als auch der von $\cos\varrho$ gleich Null, d. h. es gelten die vier Beziehungen:

$$f(z)\cdot\left(\mu\chi - \frac{1}{v_0}\cos\delta\right) = -f'(z)\frac{T}{2\pi}\sin\delta \quad (12\,a)$$

$$f(z)\frac{1}{v_0}\sin\delta = -f'(z)\frac{T}{2\pi}\cos\delta \quad (12\,b)$$

$$f(z)\cdot\left(2\varkappa T\sin\delta + \varepsilon\cos\delta - \frac{\chi}{v_0}\right) = 0 \quad (13\,a)$$

und

$$f(z)\cdot(2\varkappa T\cos\delta - \varepsilon\sin\delta) = -f'(z)\,\chi\frac{T}{2\pi}. \quad (13\,b)$$

Aus (12 b) folgt:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{2\pi}{v_0 T} \operatorname{tg}\delta .$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt:

$$f(z) = e^{-2\pi(\operatorname{tg}\delta)\frac{z}{\lambda}}, \qquad (14)$$

wobei λ die Wellenlänge im Leiter bedeutet, so daß

$$\lambda = v_0 T$$

ist. Die Integrationskonstante wurde durch Beachtung der Beziehung

$$f(0) = 1 \qquad (14\,a)$$

bestimmt, welche aus der Bedeutung von f(z) als Dämpfungsfunktion folgt. Der üblichen Benennung gemäß ist $\operatorname{tg}\delta$ als Absorptionsindex zu bezeichnen.

Durch kreuzweise Multiplikation der beiden Seiten der Gleichungen (12 a) und (12 b) findet man:

$$\mu\chi\cos\delta - \frac{1}{v_0}\cos^2\delta = \frac{1}{v_0}\sin^2\delta,$$

woraus folgt:

$$\cos\delta = \frac{1}{\mu\chi v_0}. \qquad (15)$$

Diese Gleichung wird durch nachstehend gezeichnetes rechtwinkliges Dreieck veranschaulicht. Multipliziert man die beiden

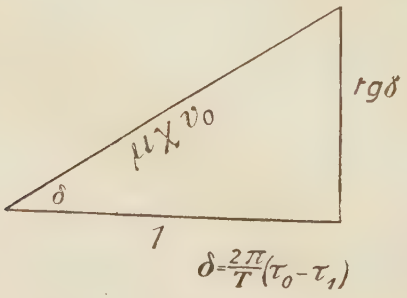

Fig. 2.

Seiten der Gleichungen (12 b) und (13 b) kreuzweise miteinander und macht von (15) Gebrauch, so erhält man die Beziehung:

$$\frac{2\varkappa T}{v_0 \mu^2 \chi^2} - \frac{\varepsilon \sin\delta}{\mu\chi} = \chi \sin\delta. \quad (16)$$

Nach (13a) und (15) ist:

$$2\varkappa T \sin\delta + \frac{\varepsilon}{\mu\chi v_0} = \frac{\chi}{v_0}. \quad (17)$$

Durch Elimination von $\sin\delta$ aus (16) und (17) findet man:

$$\frac{4\varkappa^2 T^2}{\mu^2\chi^2} = \chi^2 - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2\chi^2}, \quad (18)$$

woraus folgt:

$$\chi^4 = \frac{4\varkappa^2 T^2 + \varepsilon^2}{\mu^2}. \quad (19)$$

Beseitigt man durch Benutzung von (15) aus Gleichung (17) $\sin\delta$, so ergibt sich:

$$v_0^2 = \frac{\frac{4\varkappa^2 T^2}{\mu^2\chi^2} + \left(\chi - \frac{\varepsilon}{\mu\chi}\right)^2}{4\varkappa^2 T^2}.$$

Diese Beziehung führt zusammen mit (18) zur folgenden Darstellung von v_0^2:

$$v_0^2 = \frac{\mu\chi^2 - \varepsilon}{2\varkappa^2 T^2 \mu}, \quad (20)$$

welche bei Verwendung von (19) die Formel liefert:

$$v_0^2 = \frac{\sqrt{4\varkappa^2 T^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}{2\varkappa^2 T^2 \mu}. \quad (21)$$

Um schließlich einen Ausdruck für $\operatorname{tg}\delta$, den Absorptionsindex, zu erhalten, wollen wir beide Seiten von Gleichung (17) durch $\cos\delta$ dividieren und dann durch Benutzung von (15) $\cos\delta$ und von (19) χ beseitigen. Hierbei finden wir:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sqrt{4\varkappa^2 T^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}{2\varkappa T}. \quad (22)$$

Man erkennt, daß $\operatorname{tg}\delta$ nie ein negatives Vorzeichen besitzt, vorausgesetzt, daß $\varkappa$ positiv ist.[1]) Wir dürfen festsetzen, daß

[1]) Sind für ε und $\varkappa$ die aus der Dispersionstheorie sich ergebenden Werte einzusetzen (s. S. 22, 23), so ist ein negativer Wert von $\varkappa$ nicht ausgeschlossen.

$\mathfrak{D}$ und D positives Zeichen haben sollen. Da dann das Gleiche von χ gilt, so lehrt Gleichung (15), daß auch $\cos\delta$ positiv ist; also unter der genannten Voraussetzung liegt δ immer im 1. Quadranten. Wie die Gleichungen (21) und (22) zeigen, besteht zwischen v_0 und $\operatorname{tg}\delta$ die einfache Beziehung:

$$\operatorname{tg}\delta = \mu\varkappa T v_0^2. \qquad (23)$$

Zum Schluß wollen wir noch eine Gleichung ableiten, die weiter unten gebraucht werden wird. Aus (17) folgt:

$$\chi \sin\delta = \frac{\chi^2 - \frac{\varepsilon}{\mu}}{2\varkappa T v_0},$$

und es ist nun nach (20):

$$\chi \cdot \sin\delta = \varkappa T v_0. \qquad (24)$$

Die Formeln (19), (21) und (22) erlauben das Amplitudenverhältnis χ, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_0, den eine Phasenverschiebung der elektrischen und magnetischen Welle ausdrückenden Unterschied δ der Argumente sowie den Absorptionsindex aus den gegebenen Konstanten ε, μ, $\varkappa$ und T zu berechnen, so daß nun alles bekannt ist, was über eine in irgendeinem homogenen, isotropen Medium sich fortpflanzende ebene, linear polarisierte elektromagnetische Transversalwelle von zeitlich konstanter Amplitude zu wissen ist.

§ 3.
Reflektierte Welle.

Bei der Aufstellung von deren Gleichungen sind die Grenzbedingungen[1]) zu berücksichtigen, welche die elektrischen und magnetischen Kräfte an der Grenzfläche erfüllen, und zwar ist von dem Satze Gebrauch zu machen: Die der Grenzfläche parallelen elektrischen und magnetischen Kraftkomponenten haben zu beiden Seiten der Grenzfläche gleiche Werte. Es muß also sein:

$X_e + X_r = X_d$, $Y_e + Y_r = Y_d$, $A_e + A_r = A_d$, $B_e + B_r = B_d$,

wobei der Index r andeutet, daß die betreffenden Vektoren der

[1]) s. Drude, Lehrbuch der Optik 1906 S. 256.

reflektierten Welle angehören. Da die Gleichungen der einfallenden und der eindringenden Welle von x und y unabhängig sind, folgern wir aus dem Bestehen von Grenzbedingungen, daß auch die Gleichungen der reflektierten Welle diese beiden Veränderlichen nicht enthalten. Somit nimmt die letzte der Formelgruppen (1) und (2) die Gestalt an:

$$\mu \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \text{ und } \frac{\partial Z}{\partial t} = 0.$$

Da wir es mit einem periodischen Schwingungsvorgang zu tun haben, ergibt sich hieraus:

$$C_r = Z_r = 0.$$

Ferner folgt aus den Beziehungen

$$Y_e = Y_d = 0 \text{ und } A_e = A_d = 0$$

auf Grund der Grenzbedingungen:

$$Y_r = 0 \text{ und } A_r = 0.$$

Daher kann man für den elektrischen Vektor der reflektierten Welle den Ansatz machen:

$$X_r = R \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - t_0 + \frac{z}{v}\right), \quad Y_r = 0, \quad Z_r = 0. \quad (25)$$

Durch Anwendung der 2. Gleichung von (1) findet man:

$$B_r = v^2 \int R \frac{2\pi}{vT} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - t_0 + \frac{z}{v}\right) dt,$$

so daß der magnetische Vektor durch die Beziehungen bestimmt ist:

$$A_r = 0, \quad B_r = -vR \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - t_0 + \frac{z}{v}\right), \quad C_r = 0. \quad (26)$$

Der Zusammenhang, in dem die einfallende, eindringende und die reflektierte Welle stehen, ist nun festzustellen. Zu diesem Zwecke machen wir von den auf S. 10 angeführten Gleichungen Gebrauch:

$$\left.\begin{aligned} X_e + X_r &= X_d \\ B_e + B_r &= B_d \end{aligned}\right\} \text{ für } z = 0.$$

In diese setzen wir die für die Wellen gefundenen Ausdrücke

ein (siehe (3), (4), (7), (8), (25) und (26)[1]). Es sollen für die Summanden, aus denen die Argumente der benutzten trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt sind, die Abkürzungen gebraucht werden:

$$\varrho_0 = \frac{2\pi}{T} t, \quad t_0' = \frac{2\pi}{T} t_0, \quad \tau_0' = \frac{2\pi}{T} \tau_0 \quad \text{und} \quad \tau_1' = \frac{2\pi}{T} \tau_1. \quad (27).$$

Man findet:

$$E \cos \varrho_0 + R (\cos \varrho_0 \cos t_0' + \sin \varrho_0 \sin t_0') = D (\cos \varrho_0 \cos \tau_1' + \sin \varrho_0 \sin \tau_1'),$$

$$v E \cos \varrho_0 - v R (\cos \varrho_0 \cos t_0' + \sin \varrho_0 \sin t_0') = \mathfrak{D} (\cos \varrho_0 \cos \tau_0' + \sin \varrho_0 \sin \tau_0').$$

Da diese Gleichungen für jeden Wert von ϱ_0 gelten sollen, muß sein:

$$\begin{cases} E + R \cos t_0' = D \cos \tau_1' \\ v E - v R \cos t_0' = \mathfrak{D} \cos \tau_0' \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} R \sin t_0' - D \sin \tau_1' = 0 \\ v R \sin t_0' + \mathfrak{D} \sin \tau_0' = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Es ergeben sich hieraus leicht die Beziehungen

$$\left(\frac{E + R \cos t_0'}{D}\right)^2 + \left(\frac{R \sin t_0'}{D}\right)^2 = 1,$$

und

$$\frac{v^2 (E - R \cos t_0')^2}{\mathfrak{D}^2} + \frac{(v R \sin t_0')^2}{\mathfrak{D}^2} = 1,$$

aus denen weiterhin folgt:

$$E^2 + 2 E R \cos t_0' + R^2 = D^2, \quad (30a)$$

$$E^2 - 2 E R \cos t_0' + R^2 = \left(\frac{\mathfrak{D}}{v}\right)^2. \quad (30b)$$

Durch gegenseitiges Addieren und Subtrahieren dieser beiden Gleichungen findet man:

$$E^2 + R^2 = \frac{1}{2} \left[D^2 + \left(\frac{\mathfrak{D}}{v}\right)^2\right], \quad (31)$$

---

[1]) Nach (14a) ist f (0) = 1.

$$\cos t_0' = \frac{D^2 - \left(\frac{\mathfrak{D}}{v}\right)^2}{4ER}. \quad (32)$$

Aus den Gleichungen (28) und (29) lassen sich noch folgende Beziehungen ableiten:

$$\sin(\tau'_0 - \tau'_1) = -\frac{2vER\sin t'_0}{\mathfrak{D}D}, \quad (29b)$$

$$\cos(\tau_0' - \tau_1') = \frac{v(E^2 - R^2)}{\mathfrak{D}D}. \quad (30b)$$

Nach (24) und (29b) ist:

$$\sin t_0' = -\frac{v_0 D^2 \varkappa T}{2vER}. \quad (33)$$

Aus den Gleichungen (15) und (30b) erhält man die Beziehung:

$$E^2 - R^2 = \frac{D^2}{v v_0 \mu}. \quad (34)$$

Addition der Gleichungen (31) und (34) ergibt:

$$2E^2 = D^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{v v_0 \mu} + \frac{\chi^2}{2v^2}\right).$$

Daher kann D nach der hieraus folgenden Formel:

$$D^2 = \frac{2E^2}{\frac{1}{v v_0 \mu} + \frac{\chi^2}{2v^2} + \frac{1}{2}} \quad (35)$$

berechnet werden. Diese Gleichung führt im Verein mit (34) zu der Beziehung:

$$R^2 = E^2\left\{1 - \frac{2}{1 + \frac{v_0\mu}{2}\left(v + \chi^2\frac{1}{v}\right)}\right\}. \quad (36)$$

Bezeichnet man $\frac{R^2}{E^2}$ mit P, so gilt die Formel:

$$1 - P = \frac{2}{1 + \frac{v_0\mu}{2}\left(v + \frac{1}{v}\chi^2\right)}. \quad (36a)$$

Die Größe $1 - P$ bezeichnet man als Transmissionskoeffizient.[1])

[1]) Über dessen energetische Bedeutung s. S. 48.

§ 4.

Zusammenstellung der gefundenen Formeln.

Es sollen jetzt die Gleichungen der Wellen und die aufgestellten Formeln angegeben werden, und zwar letztere in einer Reihenfolge, in der sie die bequeme Berechnung aller in Betracht kommenden Größen erlauben.

Einfallende Welle:

$$\text{Elektrischer Vektor: } X_e = E\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v}\right) \quad (3)$$

$$\text{Magnetischer Vektor: } B_e = vE\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v}\right) \quad (4)$$

Reflektierte Welle:

$$X_r = R\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-t_0+\frac{z}{v}\right) \quad (25)$$

$$B_r = -vR\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-t_0+\frac{z}{v}\right) \quad (26)$$

Eingedrungene Welle:

$$X_d = De^{-2\pi\frac{z}{\lambda}tg\delta}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\tau_1-\frac{z}{v_0}\right) \quad (7a)$$

$$B_d = \mathfrak{D}e^{-2\pi\frac{z}{\lambda}tg\delta}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\tau_0-\frac{z}{v_0}\right) \quad (8a)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{T}(\tau_0-\tau_1). \quad (9^a)$$

$$tg\delta = \frac{\sqrt{4\varkappa^2T^2+\varepsilon^2}-\varepsilon}{2\varkappa T}. \quad (22)$$

δ liegt bei positivem Werte von $\varkappa$ im 1. Quadranten.

$$\chi^2 = \left(\frac{\mathfrak{D}}{D}\right)^2 = \frac{1}{\mu}\sqrt{4\varkappa^2T^2+\varepsilon^2}. \quad (19)$$

$$v_0 = \frac{1}{\varkappa T}\sqrt{\frac{1}{2\mu}\left(\sqrt{4\varkappa^2T^2+\varepsilon^2}-\varepsilon\right)}. \quad (21a)$$

Wenn man $tg\delta$ berechnet hat, kann man v_0 am bequemsten nach der aus Gleichung (23) folgenden Formel

$$v_0 = \sqrt{\frac{tg\delta}{\mu\varkappa T}} \quad (21b)$$

finden.

$$D^2 = \frac{2E^2}{\frac{1}{v v_0 \mu} + \frac{\chi^2}{2v^2} + \frac{1}{2}}. \quad (35)$$

$$R^2 = E^2 \left\{ 1 - \frac{2}{1 + \frac{v_0 \mu}{2}\left(v + \chi^2 \frac{1}{v}\right)} \right\}. \quad (36)$$

Transmissionskoeffizient: $1 - P = \frac{2}{1 + \frac{v_0 \mu}{2}\left(v + \frac{1}{v}\chi^2\right)}$. (36a)

$$\sin \frac{2\pi}{T} t_0 = -\frac{v_0 D^2 \varkappa T}{2 v E R}, \quad \text{nach (33).}$$

$$\cos \frac{2\pi}{T} t_0 = \frac{D^2 - \left(\frac{1}{v}\mathfrak{D}\right)^2}{4ER}, \quad \text{nach (32).}$$

Wir setzen E, R, $\mathfrak{D}$ und D als positive Größen voraus. Dann ist $\sin \frac{2\pi}{T} t_0$ bei positivem $\varkappa$ stets negativ. Zur Berechnung von τ_0 und τ_1 können, abgesehen von Gleichung (22), die folgenden, aus den Beziehungen (28) und (29) sich ergebenden Formeln benutzt werden:

$$\sin \frac{2\pi}{T} \tau_1 = \frac{R \sin \frac{2\pi}{T} t_0}{D} = -\frac{v_0 D \varkappa T}{2 v E}, \quad (37)$$

$$\cos \frac{2\pi}{T} \tau_1 = \frac{E + R \cos \frac{2\pi}{T} t_0}{D}, \quad (38)$$

$$\sin \frac{2\pi}{T} \tau_0 = -\frac{v R \sin \frac{2\pi}{T} t_0}{\mathfrak{D}} = \frac{v_0 \varkappa T D^2}{2E\mathfrak{D}}, \quad (39)$$

$$\cos \frac{2\pi}{T} \tau_0 = \frac{v\left(E - R \cos \frac{2\pi}{T} t_0\right)}{\mathfrak{D}}. \quad (40)$$

§ 5.

Spezialisierung der Formeln.

Es soll jetzt angenommen werden, daß das Produkt $\varkappa T$ positiv und so groß ist, daß man ε und 1 dagegen vernachlässigen kann. Ferner sei für die magnetische Permeabilität des Körpers der Wert

$$\mu = \frac{1}{v^2}$$

zu verwenden, welchen sie im Äther besitzt.[1]) Unter diesen Voraussetzungen gelangt man zu folgenden Beziehungen:

Nach Gleichung (22): $tg\,\delta = 1$, also $\delta = \frac{2\pi}{T}(\tau_0 - \tau_1) = \frac{\pi}{4}$ (22*)[2])

„ „ (19): $\chi = \frac{\mathfrak{D}}{D} = v\sqrt{2\varkappa T}$, (19*)

„ „ (21): $v_0 = \frac{v}{\sqrt{\varkappa T}}$, (21*)

„ „ (35): $D^2 = E^2 \frac{2}{\varkappa T}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varkappa T}}\right)$, (35*)

„ „ (19*) und (35*): $\mathfrak{D}^2 = 4v^2E^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varkappa T}}\right)$, (35**)

„ „ (36): $R^2 = E^2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\varkappa T}}\right)$, (36*)

„ „ (36a): Transmissionskoeffizient $= 1 - P = \frac{2}{\sqrt{\varkappa T}}$, (36**)

„ „ (33): $\sin\frac{2\pi}{T}t_0 = -\frac{1}{\sqrt{\varkappa T}}$, (33*)

„ „ (32): $\cos\frac{2\pi}{T}t_0 = -1$.

---

[1]) Auch bei der Betrachtung der Reflexion von Wärmestrahlen an ferromagnetischen Körpern ist dieser Wert zu verwenden (s. S. 22 unterhalb der Tabelle).

[2]) Auf S. 14 ist erwähnt, daß δ bei positivem Werte von $\varkappa$ im 1. Quadranten liegt.

Es ist also angenähert: $\frac{2\pi}{T} t_0 = \pi.$

Nach Gleichung (37): $\sin \frac{2\pi}{T} \tau_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\varkappa T}}\right)$, (37*)

„ „ (38): $\cos \frac{2\pi}{T} \tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\varkappa T}}\right)$. (38*)

Somit gilt näherungsweise: $\frac{2\pi}{T} \tau_1 = -\frac{\pi}{4}$.

Nach Gleichung (39): $\sin \frac{2\pi}{T} \tau_0 = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa T}} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\varkappa T}}\right)$, (39*)

„ „ (40): $\cos \frac{2\pi}{T} \tau_0 = 1$, (40*)

so daß angenähert ist: $\frac{2\pi}{T} \tau_0 = 0.$

Anm. 1, das Produkt $\varkappa T$ betreffend. Diesem in obigen Formeln beständig wiederkehrenden Produkte kommt eine gewisse physikalische Bedeutung zu, und zwar ist es der Energiemenge proportional, welche im Körper während der Schwingungsdauer T in einem bestimmten Raumteile bei konstanter Amplitude A in Joulesche Wärme umgewandelt wird. Hierbei ist vorausgesetzt, daß folgender Ansatz berechtigt ist: Während der Zeit T wird in einem zylindrischen Volumenelement von der Länge dz, dessen Grundflächen der xy-Ebene parallel und von 1 cm² Größe sind, die Energie umgewandelt:

$$dW = dz \cdot \int_0^T \varkappa A^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T} t \, dt = \varkappa T \frac{A^2 dz}{2}.$$

Anm. 2, Gleichung (35*) betreffend. Die durch diese wiedergegebene Beziehung kann angenähert in der Form dargestellt werden:

$$\frac{\text{Amplitude der eindringenden elektr. Welle}}{\text{Amplitude der auffallenden elektr. Welle}} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa T}}.$$

Daß obiges Amplitudenverhältnis mit wachsenden Werten von $\varkappa$ (elektrische Leitfähigkeit) und T abnehmen muß, erklärt folgende Überlegung: Die auf den Körper auftreffende Welle ruft in ihm eine periodisch schwankende elektrische Kraft hervor. Letztere erleidet durch die auftretende elektrische Strömung eine Verminderung, da Energie als Joulesche Wärme von dem Felde abgegeben wird. Die Proportionalität der Stärke der elektrischen Strömung bei gleichbleibendem Felde mit der Leitfähigkeit $\varkappa$ läßt schließen, daß das in Rede stehende Amplitudenverhältnis mit wachsendem Werte von

$\varkappa$ abnimmt. Bei unendlich großem Werte von $\varkappa$ würde sich überhaupt kein elektrisches Feld im Leiter erhalten können, die Amplitude der elektrischen Welle wäre in ihm gleich Null. Daß ferner das betrachtete Amplitudenverhältnis auch bei wachsendem Werte von T kleiner wird, erklärt sich aus dem Umstande, daß, je langsamer die Schwingungen verlaufen, d. h. je größer T ist, die elektrische Strömung um so mehr Zeit hat, die vorhandene Feldstärke zu vermindern. Eine an diese Überlegungen sich anschließende erläuternde Bemerkung zu Formel (36**) s. S. 49 Anm. 2.

§ 6.

Herleitung für den Fall, daß $\varkappa T$ groß gegenüber ε ist.[1])

Die im Körper auftretende Welle sei durch die Gleichungen gegeben:

$$X = D e^{-az + i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v_0}\right) + i\delta}, \quad Y = 0, \quad Z = 0; \quad \text{(a)}$$

$$A = 0, \quad B = \mathfrak{D} e^{-az + i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v_0}\right)}, \quad C = 0. \quad \text{(b)}$$

Dann lautet die linke Seite der 1. Beziehung von (2) auf S. 3:

$$\frac{2\pi}{T} X (2\varkappa T + \varepsilon i).$$

In unserem Falle kann man das 2. Glied der Klammer weglassen, d. h. man darf den Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom vernachlässigen. Setzt man $\mu = \frac{1}{v^2}$ (s. S. 16), so lauten nunmehr die Feldgleichungen:

$$4\pi\varkappa X = -\frac{\partial B}{\partial z}, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -v^2 \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Durch Einsetzen von (a) und (b) finden wir:

$$4\pi\varkappa D e^{i\delta} = \left(a + i\frac{2\pi}{v_0 T}\right)\mathfrak{D}, \quad \text{(c)}$$

$$i\frac{2\pi}{T}\mathfrak{D} = v^2\left(a + i\frac{2\pi}{v_0 T}\right) D e^{i\delta}. \quad \text{(d)}$$

---

[1]) $\varkappa$ wird als positiv vorausgesetzt.

Hieraus folgt durch Multiplikation der linken und rechten Seiten beider Gleichungen miteinander:

$$i\,4\pi\varkappa\frac{2\pi}{T}=v^2\left(a^2-\left(\frac{2\pi}{v_0T}\right)^2+i\,a\,\frac{4\pi}{v_0T}\right).$$

Gleichsetzung der beiderseitigen reellen und imaginären Glieder führt zu den Beziehungen:

$$\underline{a=\frac{2\pi}{v_0T}}\quad\text{und}\quad\underline{v_0=\frac{v}{\sqrt{\varkappa T}}}.$$

Damit Gleichung (c) bestehen kann, muß sein:

$$4\pi\varkappa D\cos\delta=a\mathfrak{D},$$

$$4\pi\varkappa D\sin\delta=\frac{2\pi}{v_0T}\mathfrak{D}.$$

Hieraus lassen sich leicht die Formeln ableiten:

$$\operatorname{tg}\delta=1,$$

$$\underline{\mathfrak{D}=v\sqrt{2\varkappa T}\cdot D.}$$

$\mathfrak{D}$ und D werde als positiv vorausgesetzt, so daß ist:

$$\underline{\delta=\frac{\pi}{4}}.$$

Einfallende und reflektierte Welle seien durch die Beziehungen gegeben (die magnetischen Vektoren erhält man aus den elektrischen durch Benutzung der Maxwellschen Gleichungen):

$$X_e=Ee^{i\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v}\right)+i\zeta},\quad Y_e=0,\quad Z_e=0;$$
$$A_e=0,\qquad B_e=vX_e,\quad C_e=0;$$
$$X_r=Re^{i\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right)+i\eta},\quad Y_r=0,\quad Z_r=0;$$
$$A_r=0,\qquad B_r=-vX_r,\quad C_r=0.$$

Aus den Grenzbedingungen (s. S. 10) folgt:

$$Ee^{i\zeta}+Re^{i\eta}=De^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$Ee^{i\zeta}-Re^{i\eta}=D\sqrt{2\varkappa T}.$$

Hiernach ist:

$$2\mathrm{E}e^{i\zeta} = \mathrm{D}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + \sqrt{2\varkappa\mathrm{T}}\right),$$

$$2\mathrm{R}e^{i\eta} = \mathrm{D}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2\varkappa\mathrm{T}}\right).$$

Durch Gleichsetzung des Reellen und Imaginären findet man:

$$2\sqrt{2}\,\mathrm{E}\cos\zeta = \mathrm{D}\left(1 + 2\sqrt{\varkappa\mathrm{T}}\right), \quad \text{(e)}$$

$$2\sqrt{2}\,\mathrm{E}\sin\zeta = \mathrm{D}, \quad \text{(f)}$$

$$2\sqrt{2}\,\mathrm{R}\cos\eta = \mathrm{D}\left(1 - 2\sqrt{\varkappa\mathrm{T}}\right), \quad \text{(g)}$$

$$2\sqrt{2}\,\mathrm{R}\sin\eta = \mathrm{D}. \quad \text{(h)}$$

Unter Vernachlässigung von 1 gegen $2\varkappa\mathrm{T}$ erhalten wir aus (e) und (f) sowie aus (g) und (h):

$$\mathrm{D}^2 = \frac{2\mathrm{E}^2}{\sqrt{\varkappa\mathrm{T}}\left(1 + \sqrt{\varkappa\mathrm{T}}\right)},$$

$$\mathrm{R}^2 = \frac{\mathrm{E}^2\left(\sqrt{\varkappa\mathrm{T}} - 1\right)}{\sqrt{\varkappa\mathrm{T}} + 1}.$$

Diese Beziehungen können geschrieben werden:

$$\underline{\mathrm{D}^2 = \frac{2\mathrm{E}^2}{\varkappa\mathrm{T}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varkappa\mathrm{T}}}\right)},$$

$$\underline{\mathrm{R}^2 = \mathrm{E}^2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\varkappa\mathrm{T}}}\right)}.$$

Aus den Gleichungen (e) bis (h) folgt schließlich noch:

$$\underline{\operatorname{tg}\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa\mathrm{T}} + 1}},$$

$$\underline{\operatorname{tg}\eta = \frac{-1}{2\sqrt{\varkappa\mathrm{T}} - 1}}.$$

Werden E, R und D als positiv vorausgesetzt, so liegt nach (e) bis (h) ζ im 1. und η im 2. Quadranten.

Zum Vergleich mit den früheren Formeln sei bemerkt, daß ist:

$$\zeta = \frac{2\pi}{T}\tau_0 \quad \text{und} \quad \zeta - \eta = \frac{2\pi}{T}t_0.$$

§ 7.

Zusammensetzung der einfallenden und der reflektierten Welle.

Wir wollen die elektrischen und magnetischen Vektoren, die im Vakuum infolge der Übereinanderlagerung dieser beiden Wellen auftreten, mit X_v und B_v bezeichnen. Dann finden wir bei Benutzung der „spezialisierten Formeln“ (s. S. 16) und der Gleichungen (3), (4), (25) und (26) auf S. 14:

$$X_v = X_e + X_r = E\left\{\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v}\right) - \cos\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right) + \frac{1}{\sqrt{\varkappa T}}\left[\cos\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right) - \sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right)\right]\right\}, \tag{41}$$

$$B_v = B_e + B_r = vE\left\{\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v}\right) + \cos\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right) - \frac{1}{\sqrt{\varkappa T}}\left[\cos\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right) - \sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right)\right]\right\}. \tag{42}$$

Ist $\varkappa \cdot T$ hinreichend groß, so begeht man nur einen kleinen Fehler, wenn man die mit $\frac{1}{\sqrt{\varkappa T}}$ multiplizierten Glieder in den beiden Gleichungen wegläßt. In diesem Falle erhält man die Beziehungen:

$$X_v = 2E\sin\frac{2\pi}{T}t\cdot\cos\frac{2\pi}{vT}z \quad \text{und} \quad B_v = 2vE\cos\frac{2\pi}{T}t\cos\frac{2\pi}{vT}z,$$

welche eine stehende Welle darstellen. Man hat bekanntlich in der Tat bei der Reflexion von Licht an Metall stehende Wellen nachgewiesen und ihr Auftreten in der Lippmanschen Farbenphotographie praktisch verwertet.

§ 8.

Bemerkungen zur Beurteilung des Gültigkeitsbereiches der aufgestellten Formeln.

Die Übereinstimmung der auf den Maxwellschen Gleichungen fußenden Theorie der Metallreflexion mit der Wirklichkeit ist von Hagen und Rubens[1]) für den Fall gezeigt worden, daß Wärmestrahlen auf Metall nahezu senkrecht auftreffen. Die Theorie wurde gut bestätigt, wie die aus der genannten Abhandlung entnommenen und in der folgenden Tabelle zusammengestellten Angaben erkennen lassen. In letzterer bedeutet $P' = 100\,P$ (über die Bedeutung von P s. S. 13 unt. und S. 48) und $\varkappa' = \frac{\varkappa}{\varkappa_{Hg}}$ ($\varkappa_{Hg}$ ist die Leitfähigkeit des Quecksilbers bei 0° und hat den Wert $1{,}063 \cdot 9 \cdot 10^{15}$ sec^{-1}).

Wellenlänge im Vakuum $\lambda_v = vT$	$(100 - P')\sqrt{\varkappa'}$ Mittelwerte aus den Beobachtungen	Durchschnittliche Abweichungen vom Mittel	$(100 - P')\sqrt{\varkappa'}$ berechnet nach Gleichung (36**) auf S. 16	Abweichungen der Mittelwerte aus den Beobachtungen von den berechneten Werten
4 μ	19,4	21,0 %	17,7	9,6 %
8 μ	13,0	14,5 %	12,5	4,0 %
12 μ	11,0	9,6 %	10,2	7,8 %
25,5 μ	7,36	4,9 %	7,02	4,8 %

Es ist beachtenswert, daß die Reflexionsformel $1 - P = \frac{2}{\sqrt{\varkappa T}}$, bei deren Ableitung die Permeabilität μ gleich 1 gesetzt wurde, auch für ferromagnetische Metalle sich als gültig erweist. Näheres hierüber befindet sich in der genannten Abhandlung.[2]) Für sichtbares Licht stimmt die Theorie nicht mehr mit der Erfahrung überein, man kann jedoch diesen Widerspruch heben, indem man die Größen ε (Dielektrizitätskonstante) und $\varkappa$ in anderer Weise definiert. Hierüber gibt die Dispersionstheorie Aufschluß.

---

[1]) s. Verweis auf S. 1.

[2]) Auf S. 900; s. auch Drude, Optik 1906 S. 440—444.

Anm.: Es soll jetzt gezeigt werden, wie man unter Benutzung der Formeln, welche die Dispersionstheorie Drudes (Optik 1906) enthält, die zu benutzenden Werte von ε und $\varkappa$ berechnen kann. Drude macht in seiner Theorie der absorbierenden Körper (S. 338ff.) von komplexen Größen Gebrauch und beweist, daß man auch bei guten Leitern die für Nichtleiter geltenden Maxwellschen Gleichungen verwenden kann, wenn man an Stelle von ε die komplexe Größe

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\,2\varkappa T^{3})$$

einsetzt. Schreibt man ε' in der Form $\alpha - i\beta$, so ist

$$\varepsilon = \alpha, \quad \varkappa = \frac{\beta}{2T}.$$

Um nun die gesuchten neuen Werte von ε und $\varkappa$ zu finden, hat man einen geeigneten von den in der Dispersionstheorie für ε' angegebenen Ausdrücken in die Form $\alpha - i\beta$ zu bringen und kann dann nach den beiden angeführten Gleichungen ε und $\varkappa$ berechnen.

---

[3]) Drude bezeichnet die Leitfähigkeit mit σ.

Zweiter Teil.

Graphische Darstellungen der Wellen und tabellarischer Überblick.

§ 1.

Darstellung der Wellen durch ein Vektordiagramm.

In beistehend gezeichneter Weise kann man die einfallende, reflektierte und eindringende Welle durch ein Vektordiagramm darstellen (für den Fall $z = 0$). Die Länge eines jeden der ge-

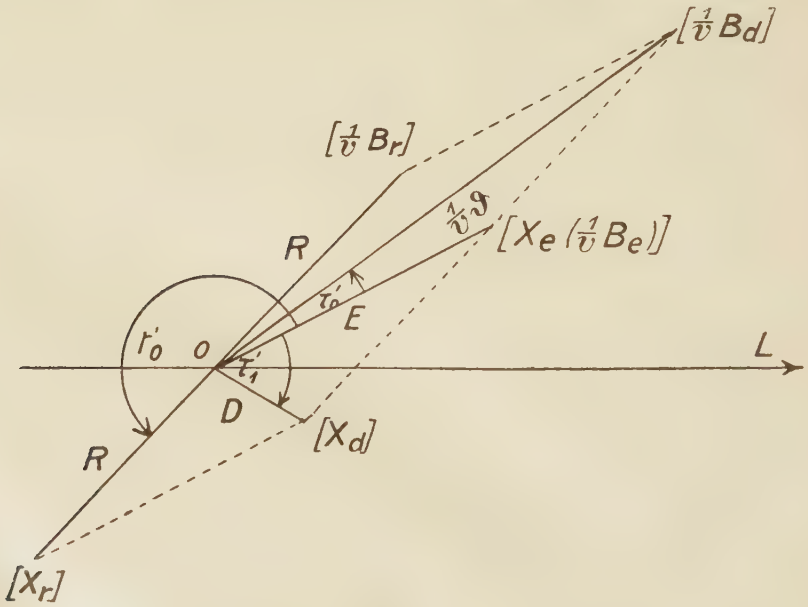

Fig. 3.

Die in der Figur dargestellten Größen sind willkürlich gewählt. Die Buchstaben X_e, X_r usw. sind in Klammern eingeschlossen, da man die Größe der betreffenden Vektoren erst durch Projektion auf OL erhält.

zeichneten Vektoren ist gleich der Amplitude der durch ihn wiedergegebenen Welle, und die in Bogenmaß gemessene Größe des von ihm mit dem Strahle O L gebildeten Winkels ist gleich dem jeweiligen Werte des Argumentes der die Welle ausdrückenden Funktion. Da alle Wellen durch cos-Funktionen dargestellt sind, geben die Projektionen der Vektoren auf O L die augenblickliche Größe der elektrischen bezw. magnetischen Felder an. Die Beträge von R und t_0' sind aus den oben aufgeführten Formeln zu entnehmen. Die durch die gestrichelten Linien angedeuteten Konstruktionen von X_d und $\frac{1}{v}B_d$ (durch Bildung von Parallelogrammen aus X_e und X_r bezw. $\frac{1}{v}B_e$ und $\frac{1}{v}B_r$) folgen aus den Grenzbedingungen (s. S. 10).

Bem.: Von den magnetischen Vektoren ist hier der v-te Teil aufgetragen. Dies ist aus folgendem Grunde den physikalischen Verhältnissen angemessen: Setzt man die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 1$ und die magnetische Permeabilität $\mu = \frac{1}{v^2}$ (Werte für den Äther im elektrostatischen Maßsystem), so ist die Energie eines elektrischen Feldes X, bezogen auf die Volumeneinheit, gleich $\frac{1}{8\pi}X^2$, die eines magnetischen B gleich $\frac{1}{8\pi}\left(\frac{B}{v}\right)^2$. Will man elektrische und magnetische Felder in ihrer energetischen Bedeutung vergleichen, so sind daher die Beträge der letzteren durch v zu dividieren, wenigstens wenn die Felder im Vakuum auftreten.

§ 2.
Tabellarischer Überblick.

In der folgenden Tabelle sind zu einigen Werten von $\varkappa$ und T die zugehörigen Werte von $\sqrt{\varkappa T}$, $\frac{D}{E}$ und λ angegeben. Letzteres Amplitudenverhältnis ist nach der aus Gleichung (35*) [1]) folgenden Beziehung

$$\frac{D}{E} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varkappa T}}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\varkappa T}}\right)$$

[1]) s. S. 16.

Wellenlänge im Vakuum	Schwingungsdauer: T	Hg, $\varkappa = 9{,}6 \cdot 10^{15}\,\mathrm{sec}^{-1}$			Zn, $\varkappa = 15 \cdot 10^{16}\,\mathrm{sec}^{-1}$			Ag, $\varkappa = 58 \cdot 10^{16}\,\mathrm{sec}^{-1}$		
		$\sqrt{\varkappa T}$	$\frac{D}{E}$	Wellenlänge im Leiter: λ	$\sqrt{\varkappa T}$	$\frac{D}{E}$	λ	$\sqrt{\varkappa T}$	$\frac{D}{E}$	λ
$4\,\mu$	$\frac{4}{3} \cdot 10^{-14}$ sec	11	0,12	$0{,}36\,\mu$	45	0,031	$0{,}089\,\mu$	88	0,016	$0{,}045\,\mu$
$10\,\mu$	$\frac{10}{3} \cdot 10^{-14}$ sec	18	0,077	$0{,}56\,\mu$	71	0,020	$0{,}14\,\mu$	$14 \cdot 10$	0,010	$0{,}071\,\mu$
$25\,\mu$	$\frac{25}{3} \cdot 10^{-14}$ sec	28	0,049	$0{,}89\,\mu$	$11 \cdot 10$	0,012	$0{,}23\,\mu$	$22 \cdot 10$	0,0064	$0{,}11\,\mu$
1 cm	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-10}$ sec	$57 \cdot 10$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	$18\,\mu$	$22 \cdot 10^{2}$	$6{,}4 \cdot 10^{-4}$	$4{,}5\,\mu$	$44 \cdot 10^{2}$	$3{,}2 \cdot 10^{-4}$	$2{,}3\,\mu$
1 m	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ sec	$57 \cdot 10^{2}$	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$18 \cdot 10\,\mu$	$22 \cdot 10^{3}$	$6{,}4 \cdot 10^{-5}$	$45\,\mu$	$44 \cdot 10^{3}$	$3{,}2 \cdot 10^{-5}$	$23\,\mu$
100 m	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-6}$ sec	$57 \cdot 10^{3}$	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	1,8 mm	$22 \cdot 10^{4}$	$6{,}4 \cdot 10^{-6}$	0,45 mm	$44 \cdot 10^{4}$	$3{,}2 \cdot 10^{-6}$	0,23 mm
1000 m	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$ sec	$18 \cdot 10^{4}$	$7{,}9 \cdot 10^{-6}$	5,6 mm	$7{,}1 \cdot 10^{5}$	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$	1,4 mm	$14 \cdot 10^{5}$	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	0,72 mm

Die Tabelle zeigt, daß die Wellenlänge im Leiter (λ) viel langsamer anwächst als die im Vakuum. Die Abhängigkeit der Wellenlänge λ von der im Vakuum, die λ_v genannt werden möge, ist nach Gleichung (21*) (S. 16) durch die Beziehung gegeben:

$$\lambda = \sqrt{\frac{v}{\varkappa}} \cdot \sqrt{\lambda_v}\,.$$

berechnet, also ist von einer der spezialisierten Formeln Gebrauch gemacht worden.

§ 3.

Graphische Darstellung der Wellen für einen Spezialfall.

Es sollen jetzt die Wellen für den Fall zur Darstellung gebracht werden, daß Wärmestrahlen von der Wellenlänge 12 μ auf Platin von Zimmertemperatur (18° C) auffallen. Es ist also:

$$\varkappa = 88{,}4 \cdot 10^{15}\,\text{sec}^{-1}, \quad T = 4 \cdot 10^{-14}\,\text{sec}, \quad \lambda = 0{,}2018\,\mu.$$

Für den genannten Fall hatten die Untersuchungen von Hagen und Rubens[1]) besonders gute Übereinstimmung mit der Theorie gezeigt. Als Wert des Ausdruckes $(100 - P)\sqrt{\varkappa}$ ergab sich experimentell der Betrag 10,6, während aus der Theorie die Zahl 10,54 folgt. Unter Benutzung der spezialisierten Formeln S. 16 und 17 erhält man folgende Werte für die in Betracht kommenden Konstanten:

$$\sqrt{\varkappa T} = 59{,}5, \qquad D/E = 0{,}0236, \qquad \frac{1}{v}\mathfrak{D}/E = 1{,}984, \quad R/E = 0{,}983,$$

$$t_0' = -2\pi \cdot 0{,}503, \quad \tau_1' = -2\pi \cdot 0{,}1237, \quad \tau_0' = \frac{\pi}{4} + \tau_1' = 2\pi \cdot 0{,}0013.$$

Nach (3) bis (8a) (S. 14) können die Gleichungen der Wellen geschrieben werden:

$$X_e = E \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v}\right), \quad \frac{1}{v} B_e = E \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v}\right),$$

$$X_r = -\,0{,}983\,E \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z}{v}\right) + 2\pi \cdot 0{,}003\right],$$

$$\frac{1}{v} B_r = 0{,}983\,E \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{z}{v}\right) + 2\pi\ 0{,}003\right],$$

$$X_d = 0{,}0236 \cdot E \cdot e^{-2\pi \frac{z}{\lambda}} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v_0}\right) + 2\pi \cdot 0{,}1237\right],$$

$$\frac{1}{v} B_d = 1{,}984\,E\,e^{-2\pi \frac{z}{\lambda}} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v_0}\right) - 2\pi \cdot 0{,}0013\right],$$

[1]) E. Hagen und H. Rubens, Annalen der Physik 1903 Nr. 8b S. 873.

In Fig. 4 sind die Wellen für den Wert $t = -\frac{T}{4}$ gezeichnet. Hierbei lauten ihre Gleichungen:

$$X_e = E \sin \frac{2\pi}{T}\left(-\frac{z}{v}\right), \quad \frac{1}{v} B_e = E \sin \frac{2\pi}{T}\left(-\frac{z}{v}\right),$$

$$X_r = -0{,}983\, E \sin\left[\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{z}{v} + 2\pi \cdot 0{,}003\right],$$

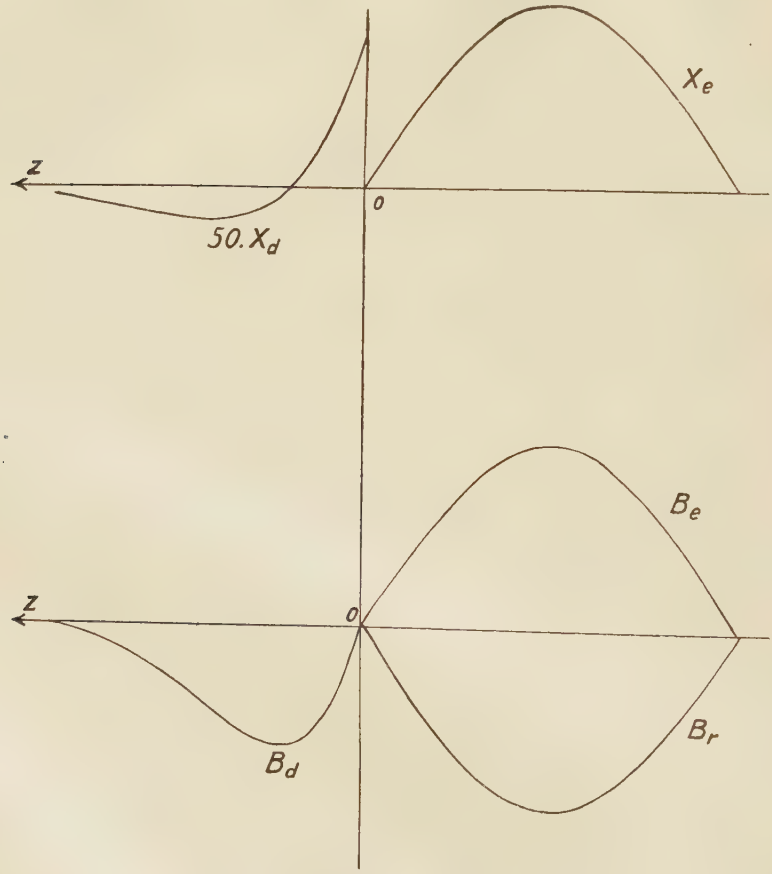

Fig. 4.

Ortsdiagramm f. $t = -\frac{T}{4}$.

Wellenlänge im Leiter (λ) in 50-fach. Maßstab gegenüber der im Vak. gez. X_r ist nicht gezeichnet, da es ziemlich mit X_e zusammenfällt.

$$\frac{1}{v} B_r = 0{,}983\, E \sin\left[\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{z}{v} + 2\pi\cdot 0{,}003\right],$$

$$X_d = -\,0{,}0236\, E\, e^{-2\pi\frac{z}{\lambda}} \sin\left[\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{z}{v_0} - 2\pi\cdot 0{,}1237\right],$$

$$\frac{1}{v} B_d = -\,1{,}984\, E\, e^{-2\pi\frac{z}{\lambda}} \sin\left[\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{z}{v_0} + 2\pi\cdot 0{,}0013\right].$$

Fig. 5 zeigt ein Diagramm für den Fall $t = 0$. Die Gleichungen der Wellen lauten jetzt:

$$X_e = E\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{z}{v},$$

$$\frac{1}{v} B_e = E\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{z}{v},$$

$$X_r = -\,0{,}983\, E\cos\left[\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{z}{v} + 2\pi\cdot 0{,}003\right],$$

$$\frac{1}{v} B_r = -\,X_r,$$

$$X_d = 0{,}0236\, E\, e^{-2\pi\frac{z}{\lambda}} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{z}{v_0} - 2\pi\cdot 0{,}1237\right],$$

$$\frac{1}{v} B_d = 1{,}984\, E\, e^{-2\pi\frac{z}{\lambda}} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{z}{v_0} + 2\pi\cdot 0{,}0013\right].$$

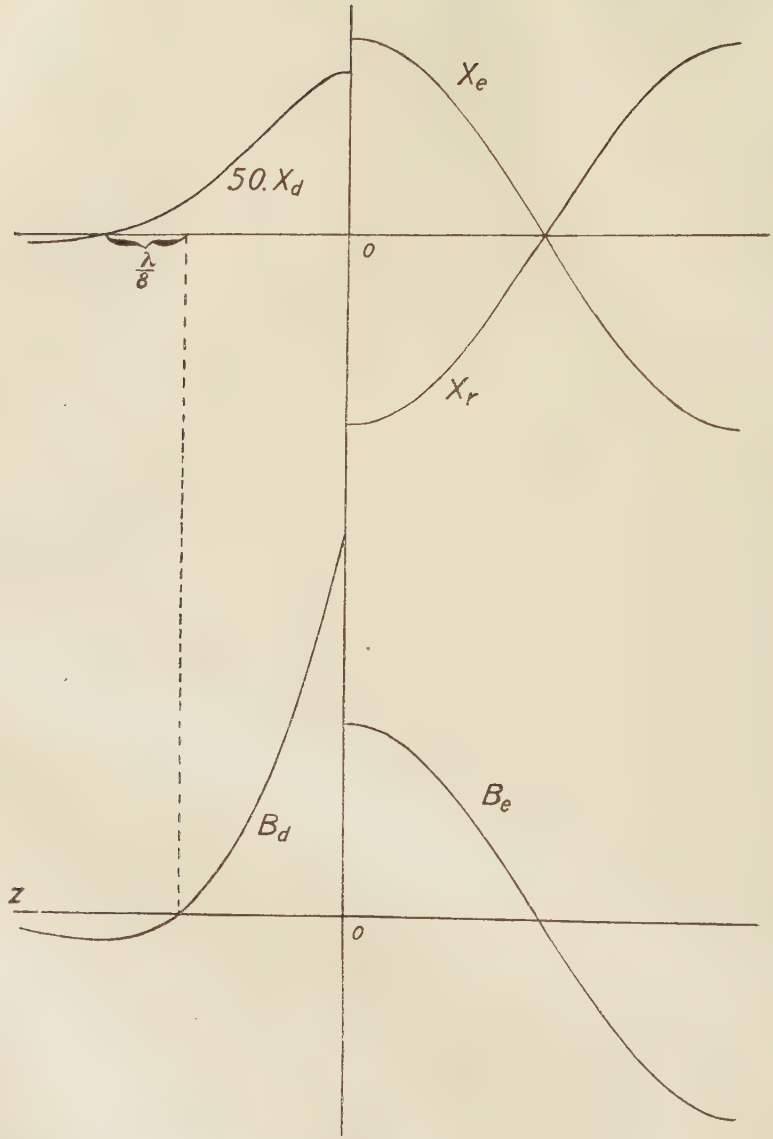

Fig. 5.

Ortsdiagramm f. $t = 0$.

Wellenlänge im Leiter (λ) in 50-fach. Maßstab gegenüber der im Vak. darg. B_r wird nicht gezeichnet, da es nahezu mit B_e zusammenfällt.

Dritter Teil.

Die Fortpflanzung der Energie durch elektromagnetische Wellen.

§ 1.

Energiefortpflanzung durch eine in einem Isolator fortschreitende Welle.

Das Medium besitze die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität $\mu = \frac{1}{v^2}$ (v = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). In ihm schreite eine ebene elektromagnetische Welle vorwärts, welche durch die Gleichungen bestimmt sei:

$$X = E \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v'}\right), \quad Y = 0, \qquad Z = 0;$$

$$A = 0, \qquad B = \varepsilon v' E \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v'}\right), \quad C = 0.$$

v' ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,[1]) im übrigen ist die Bezeichnungsweise wie im ersten Teil (siehe § 1) gewählt. Nach dem Poyntingschen Satze ist die während der Zeit dt durch 1 cm² hindurchströmende Energie durch den Ausdruck gegeben:

$$\mathfrak{E}_i \, dt = \frac{dt}{4\pi} \cdot XB = \frac{1}{4\pi} \varepsilon v' E^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v'}\right) dt.$$

---

[1]) Bekanntlich ist: $v' = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon}}$. (Man erhält diese Beziehung aus (21a) auf S. 14, indem man zur Grenze $\varkappa = 0$ übergeht und $\mu = \frac{1}{v^2}$ setzt.)

Es soll nun der Gesamtbetrag an elektrischer und magnetischer Energie berechnet werden, welcher sich zur Zeit t in einem zylindrischen Volumenelement befindet, dessen Grundfläche parallel der xy-Ebene ist, die Größe 1 cm² besitzt und von der genannten Ebene den Abstand z hat, und dessen Höhe gleich dz ist. Nennt man diese Energiemenge $H_i\,dz$, so ist:

$$H_i\,dz = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon X^2 + \mu B^2)\,dz = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi}\cos^2\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v'}\right)dz.$$

Braucht die Strahlung zur Zurücklegung der Strecke dz die Zeit dt, so gilt die Gleichung:

$$dz = v'\,dt.$$

Man findet daher die Beziehung:

$$\mathfrak{E}_i\,dt = H_i\,dz.$$

Diese Gleichung besagt, daß während der Zeit, in welcher der Schwingungszustand von der einen Grenzfläche (parallel der xy-Ebene) des betrachteten Volumenelementes bis zur anderen fortschreitet, gerade diejenige Energiemenge durch die eine Grenzfläche hinausströmt, welche in dem Raumelement enthalten ist. Die Energiefortpflanzung erfolgt also derart, als wenn sich konstante elektrische und magnetische Felder im Äther befänden und dieser sich mit der Geschwindigkeit v' fortbewegte.

§ 2.

Energieströmung infolge einer in einem Leiter fortschreitenden Welle.

Es pflanze sich eine Welle fort, welche durch die auf S. 14 angegebenen Gleichungen (7a) und (8a) bestimmt ist. Wir machen die Voraussetzung, daß man die Größen ε und 1 gegen $\varkappa \cdot T$ [1]) vernachlässigen und $\mu = \frac{1}{v^2}$ setzen kann, so daß die auf S. 16 und 17 angeführten „spezialisierten“ Formeln zu benutzen sind.

Unter Beachtung der Beziehung

$$\delta = \frac{2\pi}{T}(\tau_0 - \tau_1) = \frac{\pi}{4} \quad (22^*) \text{ S. 16}$$

[1]) $\varkappa$pos.

und der auf S. 6 über die Argumente gemachten Bemerkung erhält man die Wellengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= De^{-2\pi\frac{z}{\lambda}} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v_0}\right)+\frac{\pi}{4}\right] \\ B &= \mathfrak{D}e^{-2\pi\frac{z}{\lambda}} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v_0}\right) \end{aligned}\right\}. \quad (I)$$

Diese nehmen bei Gebrauch der Abkürzung

$$\varrho = \frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v_0}\right) \quad (Ia)$$

die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} X &= De^{-2\pi\frac{z}{\lambda}} \cos\left(\varrho+\frac{\pi}{4}\right) \\ B &= \mathfrak{D}e^{-2\pi\frac{z}{\lambda}} \cos\varrho \end{aligned}\right\}. \quad (Ib)$$

Wir wollen nun die während der Zeit d t durch eine der x y-Ebene parallele, im Innern des Leiters gelegene Fläche von 1 cm² Größe hindurchströmende Energiemenge $\mathfrak{E}$ unter Benutzung des Poyntingschen Satzes berechnen. Die Gültigkeit des letzteren ist nur hinsichtlich seiner Anwendung auf geschlossene Flächen streng bewiesen.[1]) Durch folgende Überlegung soll gezeigt werden, daß auch zur Berechnung der durch das erwähnte Flächenstück erfolgenden Energiestrahlung von ihm Gebrauch gemacht werden kann. Wir wenden ihn auf einen Zylinder an, dessen eine Endfläche das betrachtete Flächenstück ist, und dessen andere Endfläche so tief im Innern des Leiters liegt, daß durch sie keine merkliche Energiemenge hindurchstrahlt. Der Zylindermantel sei der z-Achse parallel. Da der Poyntingsche Vektor der Mantelfläche parallel ist, liefert diese keinen Beitrag zu dem über die Oberfläche des Zylinders zu bildenden Integral. Das Gleiche gilt von der tiefer im Leiter liegenden Endfläche infolge der über ihre Lage gemachten Voraussetzung. Man kann

[1]) s. Abraham, Theorie der Elektrizität 1904 Bd. 1 S. 361.

sich also bei Berechnung der durch die Zylinderoberfläche stattfindenden Energiestrahlung auf die Betrachtung der anderen Endfläche beschränken. Somit ist die Anwendung des Poyntingschen Satzes auf letztere berechtigt. Dieser liefert für die gesuchte Energiemenge $\mathfrak{E}$ den Wert:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} D\,\mathfrak{D} e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}} \cos\varrho \cdot \cos\left(\varrho + \frac{\pi}{4}\right).$$

Da nach Gleichung (19*) auf S. 16 die Beziehung statthat:

$$D = \frac{\mathfrak{D}}{v\sqrt{2\varkappa T}},$$

so kann man schreiben:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D}^2 e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}}}{8\pi v\sqrt{\varkappa T}} \cdot \cos\varrho\,(\cos\varrho - \sin\varrho). \quad \text{(II)}$$

Der von t abhängige Faktor dieses Ausdruckes werde mit $\Phi(\varrho)$ bezeichnet, so daß ist:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D}^2 e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}}}{8\pi v\sqrt{\varkappa T}} \cdot \Phi(\varrho). \quad \text{(IIa)}$$

$\Phi(\varrho)$ läßt sich in die Gestalt bringen:

$$\Phi(\varrho) = \frac{1 + \cos 2\varrho - \sin 2\varrho}{2},$$

woraus sich folgende Schreibweise ergibt:

$$\Phi(\varrho) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\cdot\sin\left(2\varrho - \frac{\pi}{4}\right)\right). \quad \text{(III)}$$

Somit findet man unter Benutzung von (Ia):

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D}^2 e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}}}{16\pi v\sqrt{\varkappa T}}\left\{1 - \sqrt{2}\,\sin\left[\frac{4\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v_0}\right) - \frac{\pi}{4}\right]\right\}. \quad \text{(IV)}$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß $\mathfrak{E}$ auch negative Werte annehmen kann, und zwar geschieht dies nach (III), wenn

$$\sin\left(2\varrho - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

also $\frac{\pi}{4} < 2\varrho - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ ist, abgesehen von Vielfachen von 2π.

Hieraus folgt:

$\mathfrak{E} < 0$, wenn $\frac{\pi}{4} < \varrho < \frac{\pi}{2}$ ist, abgesehen von ganzen Vielfachen von π.

Wenn $\mathfrak{E}$ negativ ist, bewegt sich die Energie entgegengesetzt zur Fortpflanzungsrichtung der Welle. In der eigenartigen Tatsache, daß in einem Leiter die Energie teilweise eine derartige Fortpflanzungsrichtung besitzt, liegt eine wesentliche Verschiedenheit gegenüber der Energiebeförderung durch eine in einem Nichtleiter fortschreitende Welle, denn, wie man aus § 1 (siehe S. 31 unten) ersehen kann, ist der in einem Isolator gültige Wert $\mathfrak{E}_i$ immer positiv.

Wir haben gesehen, daß in regelmäßiger Wiederkehr für Werte von ϱ, die einen Bereich von der Größe $\frac{\pi}{4}$ erfüllen, ein Rückströmen der Energie stattfindet. Nach (22*) S. 16 ist die Phasenverschiebung des elektrischen und magnetischen Teiles der eindringenden Welle gleich $\frac{\pi}{4}$. Der Zusammenhang zwischen dem Rückströmen der Energie und der Phasenverschiebung, auf den man hiermit geführt wird, ist aus nachstehender Skizze zu ersehen.

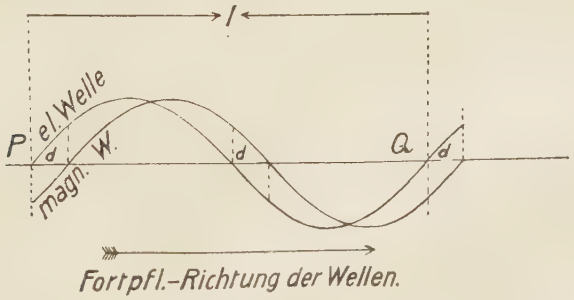

Fig. 6.

Die beiden Wellen von der Länge l besitzen die Phasenverschiebung $2\pi\frac{d}{l}$. Die Ebene, in welcher die magnetischen Schwingungen stattfinden, ist so weit um die Gerade P Q gegen die Uhrzeigerdrehrichtung, wenn man in der Richtung von P nach Q blickt,

gedreht, daß sie mit der Zeichenebene zusammenfällt. Die Strecke $PQ = l$ enthält zwei Stücke von der Länge d, zu deren Punkten entgegengesetzt gerichtete Ordinaten gehören, für die daher das Poyntingsche Produkt negativ ist, während es in den übrigen Punkten von PQ positive Werte besitzt. Somit ist in den genannten Gebieten die Bewegungsrichtung der Energie derjenigen der Welle entgegengesetzt.

Im oberen Teile von Fig. 8 auf S. 40 ist die Funktion $\Phi(\varrho)$ dargestellt, welche den zeitlichen Verlauf von $\mathfrak{E}$ für einen beliebigen positiven Wert von z erkennen läßt. (ϱ ist seiner Definition gemäß bei festgehaltenem Werte von z und bei geeigneter Wahl des Nullpunktes der Zeit letzterer proportional.)

§ 3.
Energiedichte im Leiter und deren Vergleich mit dem Energiestrom.

Wir wollen jetzt unter Anwendung der Gleichungen (Ib) auf S. 33 die räumliche Energiedichte H bestimmen, welche entsprechend definiert sein soll, wie die in § 1 eingeführte Größe H_i. Man findet:

$$H = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon X^2 + \mu B^2)$$

$$= \frac{\mathfrak{D}^2 e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}}}{8\pi v^2}\left(\frac{\varepsilon}{2\varkappa T}\cos^2\left(\varrho+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\varrho\right). \quad \text{(V)}$$

Da nach (21*) (S. 16)

$$dz = v_0\,dt = \frac{v\,dt}{\sqrt{\varkappa T}} \quad \text{(VIa)}$$

ist, so gilt die Beziehung:

$$H\,dz = \frac{\mathfrak{D}^2 e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}}}{8\pi v\sqrt{\varkappa T}}\left(\frac{\varepsilon}{2\varkappa T}\cos^2\left(\varrho+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\varrho\right)dt\,^{1}) \quad \text{(VI)}$$

[1]) Das erste Glied in dieser Klammer ist nicht vernachlässigt worden gegen das zweite, da sonst für $\cos\varrho = 0$ die Klammer verschwinden und in (VIIIa) S. 39 $\frac{v_e}{v_0} = \infty$ werden würde. In diesem Falle würde also die genannte Vernachlässigung einen unendlich großen Fehler bedingen.

Die Art der Energiebeförderung durch eine in einem Isolator fortschreitende Welle ist nach dem auf S. 32 Bemerkten durch die Gleichung gekennzeichnet:

$$H_i\,dz - \mathfrak{E}_i\,dt = 0.$$

Wir wollen den entsprechenden Ausdruck für den Leiter bilden. Unter Vornahme der üblichen Vernachlässigung findet man nach (II) und (VI):

$$H\,dz - \mathfrak{E}\,dt = \frac{\mathfrak{D}^2 e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}}}{8\pi v\sqrt{\varkappa T}} \sin\varrho\cos\varrho\,dt,$$

oder einfacher geschrieben:

$$H\,dz - \mathfrak{E}\,dt = \frac{\mathfrak{D}^2 e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}}}{16\pi v\sqrt{\varkappa T}} \sin(2\varrho)\,dt. \quad \text{(VII)}$$

Daraus, daß diese Differenz im allgemeinen von Null verschieden ist, ergibt sich, daß die Energieströmung in anderer Weise stattfindet, wenn eine Welle in einem Leiter fortschreitet, als wenn sie in einem Isolator vorwärts geht. Hierbei ist, ebenso wie bei den nächstfolgenden Überlegungen, die während der Zeit dt im betrachteten Volumenelement in Joulesche Wärme umgewandelte Energie außer acht gelassen. Diese ist nämlich vom Betrage $\varkappa X^2\,dz\,dt$ (X bedeutet nach (I) das elektrische Feld, $\varkappa$ sei die elektrische Leitfähigkeit), sie hat also zwei Differentiale als Faktoren, während bei den oben berechneten Energiemengen nur ein Differential als Faktor auftritt. Von besonderem Interesse ist die Tatsache, daß der Ausdruck $H\,dz - \mathfrak{E}\,dt$ auch negative Werte annimmt. In diesem Falle strömt durch die eine Fläche des Raumelementes während der Zeit dt mehr Energie aus letzterem aus, als in ihm vorhanden ist, und legt somit hierbei einen Weg zurück, welcher größer ist als die Höhe des Zylinders (der in Fig. 7 dargestellte Körper besteht aus zwei aufeinanderliegenden Zylindern von der vorausgesetzten Beschaffenheit). Da die genannte Höhe gleich $dz = v_0\,dt$ ist, also gleich der von der Welle in der Zeit dt zurückgelegten Strecke, so erkennt man, daß sich jetzt die Energie mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche größer ist als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle.

§ 4.

Berechnung der Geschwindigkeit v_e, mit der die Energie im Leiter strömt.

Die letzten Betrachtungen haben unsern Blick auf die Geschwindigkeit gelenkt, mit der die Energie im Leiter vorwärtsschreitet. Diese Geschwindigkeit soll jetzt berechnet werden.

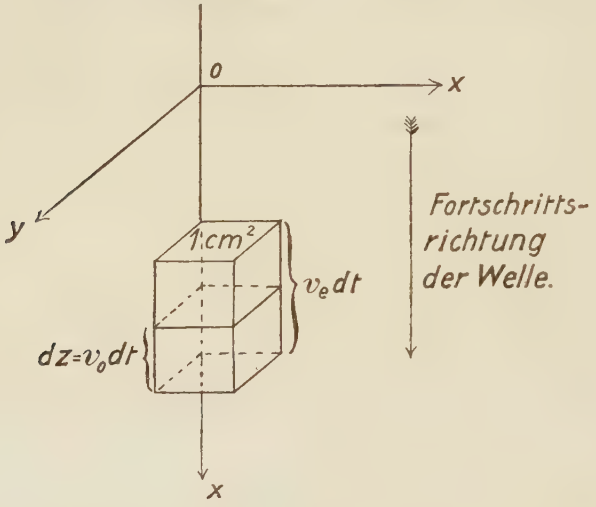

Fig. 7.
Zeichnung für den Fall: $v_e = 2 v_0$.

Hierbei gelte die Voraussetzung, daß immer die gesamte, in einem Volumenelement vorhandene Energie sich gleich schnell bewegt. Strömt durch ein der xy-Ebene paralleles Flächenstück von 1 cm² Größe die Energie mit der Geschwindigkeit v_e (v_e ist positiv, wenn die Bewegungsrichtung mit der Richtung der z-Achse zusammenfällt, im entgegengesetzten Falle negativ), so hat die während einer Zeit dt hindurchgestrahlte Energiemenge zu Beginn dieses Zeitteilchens einen zylindrischen Raum von der Höhe $|v_e| dt$ eingenommen (siehe Fig. 7). Da nun in einem entsprechenden Zylinder von der Höhe $dz = v_0 dt$ sich die Energiemenge $H dz$ befindet, so enthält der erstgenannte zylindrische Raum die Energie $\frac{|v_e|}{v_0} \cdot H dz$. Die Bedeutung des Ausdruckes $\mathfrak{E} dt$ lehrt jetzt, daß die Gleichung besteht:

$$\mathfrak{E}\,dt = \frac{v_e}{v_0} H dz. \qquad \text{(VIII)}$$

Hieraus folgt nach (II) und (VI):

$$\frac{v_e}{v_0} = \frac{\cos\varrho\,(\cos\varrho - \sin\varrho)}{\frac{\varepsilon}{2\varkappa T}\cos^2\left(\varrho + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\varrho}. \qquad \text{(VIII a)}$$

Dies kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{v_e}{v_0} = \frac{1 + \cos 2\varrho - \sin 2\varrho}{1 + \frac{\varepsilon}{2\varkappa T} - \frac{\varepsilon}{2\varkappa T}\sin 2\varrho + \cos 2\varrho}. \qquad \text{(VIII b)}$$

In der unteren Hälfte von Fig. 8 auf der folgenden Seite ist $\frac{\pi}{45} \cdot \frac{v_e}{v_0}$ als Funktion von ϱ dargestellt für den Fall, daß $\frac{\varepsilon}{2\varkappa T}$ den Wert $\frac{1}{2000}$ besitzt. Da ϱ durch die Gleichung definiert ist:

$$\varrho = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v_0}\right),$$

hat man zugleich ein Zeit- und Ortsdiagramm vor sich. Einer Änderung von ϱ um den Betrag 2π entspricht im ersteren ein Fortschritt der Zeit um die Schwingungsdauer T und im letzteren ein Längenunterschied vom Betrage $v_0 T = \lambda$, d. h. einer Wellenlänge. Der obere Teil von Fig. 8 erlaubt einen Vergleich mit dem jeweiligen Betrage der Energieströmung sowie mit dem gleichzeitigen Schwingungszustande anzustellen, denn nach (II a) ist $\Phi(\varrho)$ der Stärke der Energieströmung proportional, während nach (I b) $\cos\left(\varrho + \frac{\pi}{4}\right)$ und $\cos\varrho$ dem elektrischen bezw. magnetischen Felde proportional sind; allerdings gilt diese Bemerkung nur, wenn man die untere Hälfte von Fig. 6 als Ortsdiagramm auffaßt, da sonst in der oberen die Dämpfung noch zu berücksichtigen wäre.

Wir wollen nun die Kurve, welche die Abhängigkeit des

Quotienten $\frac{v_e}{v_0}$ von der Veränderlichen ϱ darstellt,[1]) etwas näher betrachten. Es soll im folgenden die Abkürzung verwendet werden:

$$k = \frac{\varepsilon}{2\varkappa T}. \qquad \text{(IX)}$$

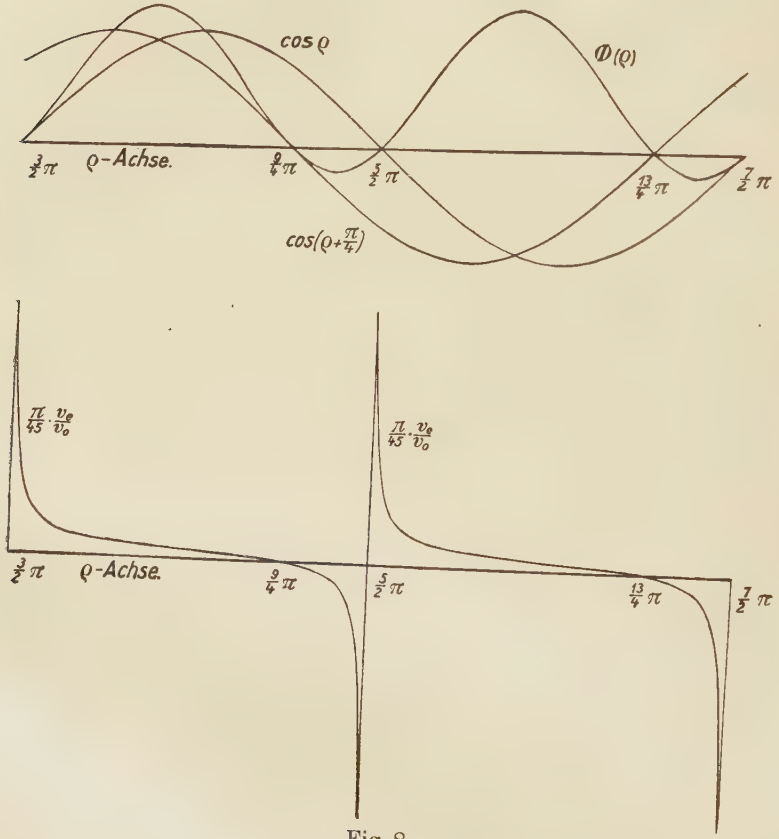

Fig. 8.
Veranschaulichung der Energieströmung im Leiter durch Zeit- bezw. Ortsdiagramm. $\left(k = \frac{1}{2000}\right)$.

Bem. Der obere Teil der Figur kann nur bei Absehen von der Dämpfung als Ortsdiagramm gelten.

[1]) Die in Fig. 8 gezeichnete Kurve unterscheidet sich von dieser dadurch, daß daselbst die Ordinaten mit $\frac{\pi}{45}$ multipliziert sind.

Da nach Voraussetzung ε gegen $\varkappa \cdot T$ vernachlässigt werden kann, ist k eine sehr kleine Größe. Für den Fall, daß $\varkappa \cdot T = \infty$, also $k = 0$ ist, tritt an Stelle der durch (VIII a) angegebenen Funktion von ϱ die folgende:

$$\varphi(\varrho) = 1 - \operatorname{tg}\varrho.$$

Ein wesentlicher Unterschied zwischen $\frac{v_e}{v_0}$ und $\varphi(\varrho)$ ist, daß für $\varrho = \frac{\pi}{2}$ (sowie die um Vielfache von π sich hiervon unterscheidenden Werte von ϱ) $\varphi(\varrho)$ gleich $\pm\infty$ ist, während $\frac{v_e}{v_0}$ den Wert 0 annimmt. Die Verwandtschaft der Kurven, welche die Funktionen $\varphi(\varrho)$ und $\frac{v_e}{v_0}$ darstellen, kommt in den erwähnten Punkten dadurch zur Geltung, daß in ihrer Umgebung sich je ein Maximum und ein Minimum befindet, zu dem die Kurve von den betrachteten Punkten aus sehr steil ansteigt bezw. abfällt. Ehe dies durch Rechnung gezeigt werden soll, sei darauf hingewiesen, daß $\frac{v_e}{v_0}$ als Funktion von ϱ angesehen die Periode π besitzt. Man überzeugt sich hiervon am schnellsten, indem man in Gleichung (VIII b) an Stelle von ϱ einsetzt $\varrho + \pi$. Differentiation des soeben erwähnten Ausdrucks für $\frac{v_e}{v_0}$ nach ϱ ergibt:

$$\frac{d\frac{v_e}{v_0}}{d\varrho} = \frac{-2(1 - k + k\sin 2\varrho + \cos 2\varrho)}{(1 + k - k\sin 2\varrho + \cos 2\varrho)^2}. \quad \text{(X)}$$

Setzt man den Zähler dieses Bruches gleich 0, so gelangt man bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von k, gerechnet von $k^{\frac{3}{2}}$ ab, zu der Gleichung:

$$\sin^2 2\varrho = 2k.$$

Da k eine kleine Größe ist, sind demnach die beiden in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Werte von ϱ, für welche die Kurve ein Maximum, bezw. Minimum besitzt, die folgenden:

$$\varrho_M = \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{k}{2}}.$$

Setzt man diese Werte in (VIII b) ein, so erhält man als Ordinaten des Maximums und des Minimums:

$$\left(\frac{v_e}{v_0}\right)_M = \pm \frac{1}{\sqrt{2k}}. \quad \text{(XI)}$$

Unter Benutzung von Gleichung (21*) auf S. 16 ergibt sich hieraus:

$$(v_e)_{Max} = \frac{v}{\sqrt{\varkappa T}} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa T}{\varepsilon}} = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Da nun der Berechnungsexponent für den Fall, daß die Wellen aus dem Vakuum in einen Nichtleiter einfallen, bekanntlich durch die Formel gegeben ist:

$$n = \frac{v}{v_0} = \sqrt{\varepsilon},$$

so erkennt man, daß der Maximalwert der Geschwindigkeit, mit welcher die Energie in einem Leiter vorwärts schreitet, unter Voraussetzung vollkommener Gültigkeit der Wellengleichungen (s. die Bemerkung auf der folgenden Seite) gleich der Geschwindigkeit ist, mit welcher eine Welle, also auch die Energie (s. S. 32), in einem Nichtleiter von derselben Dielektrizitätskonstante sich fortpflanzt.

Die Kurve steigt im Punkt $\varrho = \frac{\pi}{2}$ sehr steil an, denn der Differentialquotient hat für $\varrho = \frac{\pi}{2}$ den Wert:

$$\left(\frac{d\frac{v_e}{v_0}}{d\varrho}\right)_{\varrho=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k}.$$

Es könnte befremden, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie so rasch von jedem größten negativen zu einem maximalen positiven Werte übergeht; zieht man jedoch in Betracht, daß gleichzeitig die Stärke des Energiestromes einen

Nullwert durchschreitet, wie der obere Teil von Fig. 8 zeigt, so kann man das genannte Verhalten wohl leichter verstehen.

Bem.: Es sei darauf hingewiesen, daß die aufgestellten Funktionen (z. B. die Wellengleichungen) nur Mittelwerte angeben, da die Wirkung der einzelnen Moleküle bezw. Atome und Elektronen nicht berücksichtigt wurde. Demgemäß ist jenen nur eine beschränkte Genauigkeit zuzuschreiben.

§ 5.

Die zeitlichen Mittelwerte von $\mathfrak{E}$, der Stärke der Energieströmung, und von H, der Energiedichte im Leiter.

Diese sind nach den Gleichungen zu berechnen:

$$\overline{\mathfrak{E}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{E}\,dt \quad \text{und} \quad \overline{H} = \frac{1}{T}\int_0^T H\,dt.$$

Bei der Bestimmung von $\overline{\mathfrak{E}}$ und $\overline{H}$ ist von den Beziehungen Gebrauch zu machen:

$$\int_0^T \cos^2\frac{2\pi}{T}t\,dt = \frac{T}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^T \sin\frac{2\pi}{T}t\cos\frac{2\pi}{T}t\,dt = 0.$$

Man erhält nach (II):

$$\overline{\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{D}^2 e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}}}{16\pi v\sqrt{\varkappa T}}. \quad \text{(XII)}$$

Bei der Berechnung von $\overline{H}$ kann man, wie (VI) zeigt, die elektrische Energie vernachlässigen, so daß man findet:

$$\overline{H} = \frac{\mathfrak{D}^2 e^{-4\pi\frac{z}{\lambda}}}{16\pi v\sqrt{\varkappa T}} \cdot \frac{1}{v_0}. \quad \text{(XII a)}$$

Es besteht also die Gleichung:

$$\overline{\mathfrak{E}} = v_0 \overline{H}, \quad \text{(XIII)}$$

welche der für Nichtleiter gefundenen Beziehung

$$\mathfrak{E}_i\,dt = H_i\,dz \quad \text{(s. S. 32)}$$

entspricht, da ja in einem Isolator die Gleichung gilt:

$$dz = v'dt.$$

Die in Nichtleitern auch für die Momentanwerte gültige Beziehung besteht in Leitern nur für die zeitlichen Mittelwerte. Genügt es, diese letzteren in Betracht zu ziehen, so kann man sich nach (XIII) von der Energiefortpflanzung in einem Leiter dasselbe Bild machen, welches oben (S. 32) für Nichtleiter angedeutet wurde. Es besteht allerdings darin ein Unterschied, daß im Leiter auch die Absorption zu berücksichtigen ist. Wir wollen jetzt mit (XIII) eine Umformung vornehmen. Unter Benutzung von (VIa) erkennt man, daß aus (VIII) die Gleichung folgt:

$$\mathfrak{E}\,dt = H v_e\,dt.$$

Aus dieser Beziehung und aus (XIII) ergibt sich die Gleichung:

$$v_0 = \frac{\int_0^T H v_e\,dt}{\int_0^T H\,dt}. \qquad \text{(XIV)}$$

Hieraus ersieht man, daß die Energie im Durchschnitt mit der Geschwindigkeit v_0, d. h. der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, strömt.

§ 6.

Energiefortpflanzung im Vakuum während der Reflexion.

Wir wollen jetzt die Energieströmung betrachten, die im Äther infolge der Übereinanderlagerung der einfallenden und der reflektierten Welle zustande kommt. Zunächst soll $\mathfrak{E}_v\,dt$, die während der Zeit dt durch 1 cm² einer der Leiteroberfläche (x y-Ebene) parallele Ebene strahlende Energiemenge, mit Hilfe des Poyntingschen Satzes bestimmt werden. Wir haben hierzu das Produkt $X_v B_v$ (s. oben S. 21) zu bilden, welches geschrieben werden kann:

$$X_v B_v = v E^2 \left\{ \cos^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v}\right) - \left[\cos\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right) - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\left(\cos\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right) - \sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right)\right)\right]^2 \right\}. \qquad \text{(XV)}$$

Indem man die mit $\frac{1}{\varkappa T}$ multiplizierten Glieder vernachlässigt, findet man:

$$X_v B_v = \frac{1}{2} v E^2 \left\{ \cos \frac{4\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v}\right) - \cos \frac{4\pi}{T}\left(t + \frac{z}{v}\right) + \frac{2}{\sqrt{\varkappa T}}\left(1 + \cos \frac{4\pi}{T}\left(t + \frac{z}{v}\right) - \sin \frac{4\pi}{T}\left(t + \frac{z}{v}\right)\right)\right\}.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{E}_v \, dt = \frac{1}{4\pi} X_v B_v \, dt = \left\{ \frac{v E^2}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{T} t \cdot \sin \frac{4\pi}{\lambda_v} z + \frac{v E^2}{4\pi\sqrt{\varkappa T}} \left[1 - \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{T}\left(t + \frac{z}{v}\right) - \frac{\pi}{4}\right)\right]\right\} dt \qquad \text{(XVI)}$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die Energieströmung im Vakuum aus 2 Teilen zusammengesetzt ist. Der erste gibt für den Fall $\varkappa T = \infty$ die gesamte Energiestrahlung an. Da im genannten Fall eine stehende Welle vorhanden ist (s. S. 21), stellt er die durch eine solche bedingte Energieströmung dar. Für $z = 0$ ist sein Wert gleich Null, er gibt also keine Beförderung der Energie durch die Grenzfläche zwischen Vakuum und Leiter wieder. Diese findet auf Grund des zweiten Gliedes unseres Ausdruckes statt. Letzteres stimmt, soweit es die Genauigkeit der Formel erlaubt, mit der Funktion überein, welche $\mathfrak{E}$, die Energiestrahlung im Leiter, darstellt, wenn $z = 0$ ist. Hiervon überzeugt man sich, indem man in Gleichung (IV) $z = 0$ und $\mathfrak{D}^2 = 4 v^2 E^2$ setzt [nach (35**) auf S. 16; der Faktor $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varkappa T}}\right)$ ist weggelassen, da bei der Berechnung von $\mathfrak{E}_v$ die mit $\frac{1}{\varkappa T}$ multiplizierten Glieder vernachlässigt wurden]. Die gefundene Übereinstimmung steht mit der Tatsache im Einklang, daß sich in der Grenzfläche keine Energie ansammeln kann.[1])

[1]) Bei der Berechnung von $\mathfrak{E}$ wurde $\tau_0' = 0$ gesetzt. Dies ist für die letzten Überlegungen belanglos wegen der Vernachlässigung der mit $\frac{1}{\varkappa T}$ multiplizierten Glieder.

Wie man leicht sieht, nimmt $\mathfrak{E}_v$ sowohl positive als auch negative Werte an, d. h. die Energie strömt teils in der Richtung der z-Achse, teils in entgegengesetzter Richtung. Dieses Verhalten war zu erwarten, da sich ja im Vakuum zwei Wellen von entgegengesetzter Fortpflanzungsrichtung übereinander lagern. Im Gegensatz hierzu haben wir es im Leiter mit einer einzigen fortschreitenden Welle zu tun. Aus den letzten Betrachtungen könnte man schließen, daß das zeitweise Rückströmen der Energie im Leiter dadurch hervorgerufen wird, daß auch im Äther die Energie ein Vor- und Zurückströmen zeigt. Diese Anschauung ist jedoch unrichtig, denn bei der Ableitung der Formeln, welche die Eigenschaften der eingedrungenen Welle bestimmen,[1]) wurde nur vorausgesetzt, daß eine linear polarisierte, ebene Welle sich vorwärts bewegt, welche sich in der Weise darstellen läßt, wie es die Gleichungen (7) und (8) auf S. 6 angeben; alles übrige wurde durch Anwendung der Maxwellschen Gleichungen gefunden, ohne daß auf den Reflexionsvorgang Bezug zu nehmen war.

§ 7.

Berechnung der Geschwindigkeit v_e', mit der die Energie im Vakuum während der Reflexion strömt.

Nach (VIII) ist:

$$\frac{v_e'}{v} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\mathfrak{E}_v}{H_v},$$ [2])

da im Äther die Beziehung gilt:

$$\frac{dz}{dt} = v.$$

Es sollen die beiden Abkürzungen gebraucht werden:

$$L = \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{z}{v} \right) \qquad \text{(XVIIa)}$$

---

[1]) S. 6—10, abgesehen von der Spezialisierung.

[2]) H_v bedeutet die Energiedichte im Vakuum. Definition auf S. 32.

und

$$M = \cos\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right) - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}T}\left[\cos\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right) - \sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{z}{v}\right)\right]. \quad \text{(XVII b)}$$

Dann kann man nach (XV) nebst (XVI) schreiben:

$$\mathfrak{S}_v = \frac{vE^2}{4\pi}(L^2 - M^2).$$

Da nach (41) und (42) (S. 21) die Gleichungen bestehen

$$X_v = E\,(L - M)$$

und

$$B_v = vE\,(L + M),$$

so ist die Energiedichte folgendermaßen darzustellen:

$$H_v = \frac{1}{8\pi}\left(X_v^2 + \frac{1}{v^2}B_v^2\right) = \frac{E^2}{4\pi}(L^2 + M^2).$$

Demgemäß gilt die Gleichung:

$$\frac{v_e'}{v} = \frac{L^2 - M^2}{L^2 + M^2}. \quad \text{(XVIII)}$$

Der größte und kleinste Wert, den dieser Ausdruck annehmen kann, ist $+1$ bezw. -1, und zwar wird der erste Betrag erreicht, wenn $M = 0$, der zweite, wenn $L = 0$ ist. Beide Fälle können bei beliebig gegebenem z bezw. t verwirklicht werden, wenn man t bezw. z aus den Gleichungen $M = 0$ bezw. $L = 0$ bestimmt. Wir finden also: Die Maximalgeschwindigkeit, mit welcher sich die Energie im Vakuum während des Reflexionsvorganges fortpflanzt, ist die Lichtgeschwindigkeit. Das Ergebnis, daß sich die Energie im Vakuum nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt, ist nicht als selbstverständlich zu betrachten, denn wenn auch oben (S. 32) gezeigt wurde, daß bei einer in einem Isolator fortschreitenden Welle die Energie sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt wie jene, so kann man doch hieraus nicht unmittelbar auf die Strömungsgeschwindigkeit schließen, welche die Energie bei der Übereinanderlagerung zweier fortschreitenden Wellen besitzt.

§ 8.

Energetische Bedeutung des Transmissionskoeffizienten 1 — P.

Macht man vom Poyntingschen Satze Gebrauch, so findet man, daß die während der Schwingungsdauer T auf den Leiter auffallende Energiemenge proportional E^2 ist, die reflektierte proportional $R^2 = E^2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\varkappa T}}\right)$ und die in den Leiter eindringende proportional $E^2 - R^2 = E^2 \frac{2}{\sqrt{\varkappa T}}$. Daher läßt sich der Transmissionskoeffizient in der Form darstellen $\left(P = \frac{R^2}{E^2}\right)$:

$$1 - P = \frac{\text{Eindringende Energie}}{\text{Auffallende Energie}} = \frac{2}{\sqrt{\varkappa T}}.^{1)} \qquad \text{(XIX)}$$

Anm. 1: Um die in den Leiter eindringende Energie zu berechnen, hat man eigentlich das Produkt

$$(X_e + X_r)\,(B_e + B_r) = X_e\,B_e + X_r\,B_r + X_e\,B_r + X_r\,B_e$$

zu bilden. Wie ein Blick auf die Gleichungen (3) und (4) (S. 5) sowie (25) und (26) (S. 11) lehrt, gilt die Beziehung:

$$X_e\,B_r + X_r\,B_e = 0.$$

Die gesuchte Energiemenge ist also gleich $X_e\,B_e + X_r\,B_r$. Das erste Produkt gibt die Energie an, welche die einfallende, das zweite den negativen Betrag

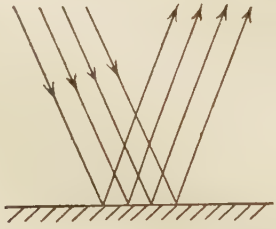

Fig. 9.
Reflektierender Körper.

der Energie, welche die reflektierte Welle mit sich führt. Somit war der oben eingeschlagene Weg berechtigt. Die Vorstellung, daß an einem Orte sich zwei derartige Energieströme überlagern, dürfte nur als eine gedankliche Zerlegung aufzufassen sein. Der durch jede von zwei sich deckenden

---

[1]) Nach Gleichung (36**) auf S. 16.

Strahlungen bewirkte Energietransport erlangt offenbar dann physikalische Bedeutung, wenn die Strahlungen außerhalb des Gebietes, in dem sie sich überlagern, eine Fortsetzung finden. Ein Beispiel für einen solchen Strahlengang ist in Fig. 9 angedeutet. Für uns ist der Fall von Interesse, daß die Strahlung nahezu senkrecht auffällt.

Anm. 2: In der Anm. 2 auf S. 17 war eine Erklärung dafür gegeben worden, daß die Amplitude einer auf einen Leiter (senkrecht) auftreffenden Welle in diesem eine um so größere Verminderung erfährt, je größer $\varkappa$ (elektrische Leitfähigkeit) und T sind. Genannte Verminderung kann man sich durch Schwingungen entstanden denken, die im Leiter auftreten und sich nach außen als reflektierte Welle fortpflanzen. Auf Grund dieser Anschauung muß letztere eine um so größere Amplitude besitzen, je größer $\varkappa$ und T sind. Da nun die reflektierte Welle Energie vom Leiter weg befördert, so ist verständlich, daß der Transmissionskoeffizient mit wachsenden Werten von $\varkappa$ und T kleiner wird, wie Gleichung (XIX) angibt.

§ 9.

Zusammenhang zwischen dem Transmissionskoeffizienten und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlung im Leiter.

Nach dem auf S. 48 Gesagten gibt der Transmissionskoeffizient das Verhältnis der während einer Schwingungsdauer in den Leiter eindringenden zu der gleichzeitig auf ihn auffallenden Energiemenge an. Aus den in § 1 angestellten Überlegungen geht hervor, daß die während der Zeit dt auf 1 cm² der Leiteroberfläche auffallende Energie vom Betrage $H_i \cdot v \cdot dt$ ist,[1]) wobei v die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet. Der Größe H_i entspricht im Leiter die Größe H. Es soll zunächst zwischen $\overline{H}_i$ und $\overline{H}$ eine Beziehung hergestellt werden.[2]) Da im Leiter die Energie des elektrischen Feldes gegenüber der des magnetischen zu vernachlässigen ist (außer in gewissen kleinen Zeitintervallen), gilt der Ansatz:

$$\overline{H} = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{(\overline{B}_d)^2}{v^2}.$$

---

[1]) Bei Berechnung von H_i ist hier $\varepsilon = 1$ und $v' = v$ zu setzen.

[2]) Striche über den Buchstaben deuten zeitliche Mittelwerte an.

Andererseits ist:

$$H_i = \frac{1}{8\pi}\left(X_e^2 + \frac{1}{v^2} B_e^2\right) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{B_e^2}{v^2}.$$

Da die einfallende Welle fast vollständig reflektiert wird und die magnetischen Schwingungen an der Leiteroberfläche einen Bauch besitzen, können wir schreiben

$$B_r = B_e,$$

so daß nach den Grenzbedingungen (s. S. 10) sein muß:

$$B_d = 2 B_e,$$

woraus folgt:

$$\overline{H} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\overline{B}_e)^2}{v^2}.$$

Somit gilt die Gleichung:

$$\overline{H} = 2 \overline{H}_i.$$

Um jetzt die während einer Sekunde in den Leiter eindringende Energie berechnen zu können, muß man die Geschwindigkeit kennen, mit der sie sich im Durchschnitt bewegt. Es ist nun die nächstliegende Annahme, daß diese mit der Geschwindigkeit übereinstimmt, mit welcher die Welle im Leiter vorwärts schreitet. Die in § 5 angestellten Berechnungen erweisen die Richtigkeit dieser Vermutung. Nennt man den Momentanwert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie im Leiter wie oben v_e, so drückt sich die gemachte Annahme durch Gleichung (XIV) auf S. 44 aus. Da also die Beziehung besteht:

$$\frac{1}{T}\int_0^T H v_e \, dt = v_0 \, \overline{H},$$

so ist ersichtlich, daß im Durchschnitt in der Sekunde die Energiemenge $v_0 \overline{H}$ in den Leiter eindringt (durch 1 cm² der Oberfläche). Demnach kann man schreiben:

$$\text{Transmissionskoeffizient} = \frac{v_0 \overline{H}}{v \overline{H}_i} = 2 \frac{v_0}{v}.$$

In der mathematischen Herleitung hatte sich oben für den Transmissionskoeffizienten der Ausdruck $\frac{2}{\sqrt{\varkappa T}}$ (36**) auf S. 16) ergeben und für v_0 der Ausdruck $\frac{v}{\sqrt{\varkappa T}}$ ((21*) auf S. 16), so daß man hiermit die letzten Betrachtungen bestätigt findet. Diese verfolgen den Zweck, die erhaltene Beziehung mit möglichst wenig Rechnung verständlich zu machen, und sie zeigen, daß man sich von dem Reflexionsvorgange folgende Anschauung bilden kann: Die Energie strömt mit Lichtgeschwindigkeit auf die Oberfläche des Leiters zu; nachdem sie nun, wenigstens teilweise, in diesen eingetreten ist, pflanzt sie sich mit einer im Durchschnitt viel geringeren Geschwindigkeit fort; hierbei ist der zeitliche Mittelwert ihrer räumlichen Dichte nur auf den doppelten Wert gestiegen. Somit dringt nur ein kleiner Teil der auf die Oberfläche des Leiters auffallenden Energie in diesen ein, woraus folgt, daß sie zum größten Teile in das Vakuum zurückgestrahlt wird, da sie sich sonst an der Leiteroberfläche anstauen müßte. Auf die beschriebene Weise kommt die reflektierte Welle zustande. Geht man umgekehrt davon aus, daß die auf den Leiter auftreffende Energie zum großen Teile zurückgeworfen wird, so kann man unter Benutzung der obigen Überlegungen schließen, daß die Strahlung sich im Leiter mit einer viel geringeren durchschnittlichen Geschwindigkeit fortpflanzt als im Vakuum, denn, obwohl die in den Leiter eindringende Welle eine doppelt so große mittlere räumliche Energiedichte aufweist als wie die auffallende Welle, führt doch jene Welle von der Oberfläche des Leiters in dessen Inneres im Durchschnitt in der Sekunde nur einen kleinen Teil der Energiemenge, welche die letztere Welle der genannten Fläche zustrahlt.

Spezialdruckerei für Dissertationen, Robert Noske, Borna-Leipzig.

Vorliegende Arbeit bildet die Weiterführung einer mir von Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Hallwachs gestellten Prüfungsaufgabe.

Den Herren

Geh. Hofrat Prof. Dr. **Helm** und Prof. Dr. **Toepler**

gestatte ich mir, für die bei der Ausführung der Arbeit erteilten Ratschläge meinen besten Dank auszusprechen.

Herrn Prof. Dr. Weber bin ich für die gütige Übernahme des Referates zu Dank verpflichtet.

Lebenslauf.

Hans Theodor Wolff wurde am 13. Dezember 1884 in Dresden geboren. Nach Besuch einer Bürgerschule trat er Ostern 1895 in das Annen-Realgymnasium und nach einem Jahre in das Wettiner Gymnasium zu Dresden ein, das er Ostern 1904 mit dem Reifezeugnis verließ. Hierauf studierte er an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule in Dresden Mathematik, Physik, Chemie, Mineralogie und Geologie. Er hörte hauptsächlich die Vorlesungen der Herren Professoren Helm, Hallwachs, Krause, Kalkowsky, Hempel, v. Meyer, Förster, Schultze und Toepler, er arbeitete mehrere Semester im physikalischen Institut von Herrn Prof. Hallwachs sowie zwei Semester im anorganisch-chemischen Laboratorium von Herrn Prof. Hempel und beteiligte sich an den Übungen der Herren Professoren Helm, Krause und Kalkowsky. Nachdem er am 18. und 22. Mai 1908 die Staatsprüfung für das höhere Schulamt bestanden hatte, wurde er der Dreikönigschule zu Dresden als Probelehrer zugewiesen. Von Ostern 1909 ab setzte er sein Probejahr am Realgymnasium zu Zwickau i. S. fort, an dem er seit 1. Juli 1909 als nichtständiger Lehrer angestellt ist.